ISSN 0130-2221

Квант

Научно-популярный
физико-математический
журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

1987

Редакционная коллегия
и редакция журнала «Квант»
поздравляют читателей
с началом нового учебного года
и всенародным праздником —
Днем знаний.
Желаем вам успехов
в труде и учении, знакомства
с увлекательными книгами,
интересных занятий
в школьных кружках,
побед на олимпиадах.
Пусть этот учебный год
поможет вам достичь
новых рубежей
в овладении основами
современных наук,
в развитии самодеятельности
и школьного самоуправления.

Квант

Основан в 1970 году

1987 9

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

Наша обложка

На обложке сентябрьского номера, как и на улице, появились первые желтые листья; среди них затерялся декартов лист — видимо, он выпал из статьи о «Геометрии» Декарта в этом номере.

Фотографии, воспроизведенные на второй странице обложки, сделаны на Московской городской олимпиаде по физике (февраль — март 1987 года).

Наш корреспондент обратился к видному советскому ученому директору Института физических проблем им. С. И. Вавилова АН СССР академику А. С. Боровику-Романову с просьбой ответить на несколько вопросов, которые, как нам кажется, интересны читателям «Кванта». Сегодня мы предлагаем вам запись этой встречи.

ИНТЕРВЬЮ С АКАДЕМИКОМ А. С. БОРОВИКОМ-РОМАНОВЫМ

— Андрей Станиславович, расскажите, пожалуйста, об Институте физических проблем, который вы возглавляете. О его истории, традициях, основных направлениях проводимых научных исследований.

— Наш институт весьма необычен по сравнению с большинством существующих в СССР институтов физического профиля. Главной его особенностью является то, что при небольшом числе сотрудников в ИФП собраны очень сильные исследователи. Основан он был в 1934 году Петром Леонидовичем Капицей, создавался под его непосредственным руководством. Создавался на протяжении достаточно долгого времени, не сразу, не одним махом. И в течение всего этого времени закладывались основы будущих направлений научных исследований.

С самого начала главным предметом исследований в ИФП стала физика низких температур, физика, связанная с проявлением квантовых закономерностей в твердых телах, а также в жидком гелии. Именно здесь в 1938 году П. Л. Капицей было открыто одно из самых удивительных проявлений квантовых законов в макроскопическом масштабе — явление сверхтекучести. Открытие сверхтекучести — это целый цикл необычайно остроумных и тонких экспериментов, приведших к созданию новой области физики — квантовой физики конденсированного состояния, ставшей сегодня фундаментом целого ряда прикладных направлений.

Следующим важнейшим достижением ученых ИФП явилось открытие промежуточного состояния сверхпроводников. Так называют особое состояние сверхпроводящего образца в магнитном поле, когда он «расслаивается» на нормальные и сверхпроводящие области. Далее последовал ряд замечательных открытий в области сверхпроводимости. В пятидесятые годы Львом Давидовичем Ландау, работавшим в ИФП, совместно с В. Л. Гинзбургом создается феноменологическая теория сверхпроводимости; А. А. Абрикосов открывает сверхпроводники второго рода, ставшие основой всех сегодняшних практических применений этого удивительного явления.

Затем, после столь интенсивных исследований сверхтекучести и сверхпроводимости, в этой области наметился некоторый спад. Однако в настоящее время, в связи с рядом блестящих открытий последних лет, эти исследования опять активизировались.

Еще одним важным направлением, с которым связаны большие достижения ИФП, явилось изучение энергетических спектров электронов в металлах. Были разработаны тончайшие методики изготовления чрезвычайно чистых монокристаллических образцов, в которых электрон «пробегал» без столкновений расстояния в миллиметры! В обычных, «грязных», образцах при комнатной температуре этот пробег не превышает нескольких межатомных расстояний. Учеными института было разработано много оригинальных методов изучения поведения электронов в металлах, которые позволили открыть совершенно новую увлекательную область физики низких температур.

Интересные результаты были получены и при изучении магнитных свойств твердых тел при низких температурах. Например, было обнаружено новое физическое явление — пьезомагнетизм — возникновение в некоторых веществах намагниченности под давлением.

Следует отметить, что последние тридцать пять лет научной деятельности самого Петра Леонидовича Капицы не были связаны с физикой низких температур. Он занимался электроникой больших мощностей, построил рекордный по мощности СВЧ-генератор — ниготрон, изучал плазменный разряд и другие связанные с плазмой физические явления. И сейчас в Институте есть лаборатория, которая под руководством С. П. Капицы занимается электроникой и ускорительной техникой. Говоря о П. Л. Капице, нельзя не упомянуть еще и о его инженерной деятельности. Все действующие в мире установки для получения кислорода путем криогенного разделения воздуха, все машины для сжижения гелия работают на принципах, предложенных Петром Леонидовичем.*)

Будучи директором ИФП, П. Л. Капица уделял большое внимание поддержанию тесных контактов между физиками-теоретиками и экспериментаторами. В Институте был создан теоретический отдел, который на протяжении многих лет возглавлял выдающийся советский физик Л. Д. Ландау. Активное сотрудничество Капицы и Ландау привело к ряду блестящих открытий в физике низких температур. Впоследствии в Институте сформировалась целая «школа Ландау», из которой вышли многие лучшие физики-теоретики нашей страны. В шестидесятых годах Академией наук СССР был организован Институт теоретической физики (носящий теперь имя Л. Д. Ландау), и часть учеников и сотрудников Ландау перешли работать туда. С этим институтом и сегодня мы сохраняем тесные связи.

Другая часть теоретиков по-прежнему работает в теоретическом отделе ИФП. В настоящее время его возглавляет Я. Б. Зельдович. Это очень разносторонний человек, много сделавший в самых различных областях физики и оборонной техники — не зря он является трижды Героем Социалистического Труда. Из последних учеников Ландау в нашем институте работают такие крупные ученые как Л. П. Питаевский и А. Ф. Андреев. Л. П. Питаевский — теоретик очень широкого профиля, которому принадлежат важные открытия в области

*) Жизнь и научная деятельность П. Л. Капицы заслуживают отдельной беседы. Интересующиеся читатели могут прочесть сборник статей П. Л. Капицы «Эксперимент и практика». (*Примеч. ред.*)

сверхтекучести и в физике плазмы. А. Ф. Андреев в прошлом году вместе с сотрудниками ИФП А. Я. Паршиным и К. О. Кешешевым был удостоен Ленинской премии. Несколько лет назад они сделали крупную работу, которой положили начало совершенно новой области физики — физике квантовых кристаллов.

Сотрудниками теоретического отдела являются также Л. А. Вайнштейн, М. И. Каганов, другие ученые. Л. А. Вайнштейн — специалист в области радиофизики — обладает удивительными способностями в математической физике. С помощью карандаша и бумаги он находит решения таких задач, которые обычно решаются лишь при помощи мощных компьютеров. М. И. Каганов — известный специалист в области электронной теории металлов.

Я перечислил только старшее поколение теоретиков, работающих в ИФП, имеются и следующие эшелоны. Основные направления их научной деятельности — физика низких температур, космология, физика плазмы.

В последние годы мы понесли большие утраты. Умерли выдающиеся физики-теоретики И. М. Лифшиц и Е. М. Лифшиц. Илья Михайлович, основатель большой научной школы в области физики твердого тела, многие годы возглавлял теоретический отдел нашего института. Евгений Михайлович Лифшиц являлся крупнейшим специалистом в космологии. Он пришел в ИФП вместе с Ландау и был не просто его учеником, но и на протяжении многих лет неизменным соавтором — ими написан классический курс теоретической физики. Совсем недавно мы потеряли замечательного ученого и человека, одного из старейших сотрудников ИФП А. И. Шальникова. Александр Иосифович работал в Институте со дня его основания, обладал огромным талантом экспериментатора и был учителем почти всех сегодняшних сотрудников.

И сегодня в институте работает целый ряд прекрасных физиков-экспериментаторов. Так, например, Ю. В. Шарвин, который совсем недавно сделал очень важное открытие, связанное с совершенно новой областью физических исследований. Его работы, по сути дела, также начинают новую область физики — так называемую мезоскопику. Суть ее объяснить достаточно трудно. Не вдаваясь в излишние подробности, скажу, что под этим названием подразумеваются сугубо квантовые эффекты, достаточно неожиданно проявляющиеся на фоне известных классических законов, скажем, закона Ома. Как я уже говорил, до сравнительно недавнего времени физики-экспериментаторы, изучающие электронные свойства твердых тел, объектом своих исследований выбирали чистейшие металлы, идеальные монокристаллы. В последнее время интерес физиков заметно переместился к «грязным» материалам. Поначалу создавалось впечатление, что теоретическая физика здесь бессильна. Однако оказалось, что и в этой области можно предсказывать очень тонкие эффекты, связанные со спецификой движения электронов в грязном металле, когда они испытывают многочисленные рассеяния на примесях чуть ли не в пределах межатомных расстояний. В силу квантовой природы самого электрона отдельные акты рассеяния оказываются хитрым образом связанными между собой, возникает специфическая интерференция. Электрон как бы обладает памятью — испытав рассеяние на одном центре, он несет до следующего соударения соответствующую информацию, и характер очередного рассеяния зависит от того, каким было предыдущее.

Тут я хотел бы еще раз подчеркнуть, что очень многое в современной физике зависит от взаимодействия экспериментаторов и теоретиков. Так, работы по мезоскопике проводились совместно с теоретиками Ленинградского института ядерной физики А. Г. Ароновым и Б. Л. Альтшулером. У нас вообще очень часто возникают связи с теоретиками других институтов.

Из старшего поколения экспериментаторов еще хотел бы назвать М. С. Хайкина и Н. В. Заварицкого. М. С. Хайкин — виртуоз экспериментальной техники. Он конструирует тончайшие приборы, которые позволяют решать сложнейшие физические задачи. В настоящее время им создано несколько так называемых туннельных микроскопов, которые как бы «ощупывают» поверхность образца*) Наиболее чувствительный из них с помощью подключенной к нему ЭВМ рисует рельеф поверхности, образованный отдельными атомами. Н. В. Заварицкий сделал много открытий в области сверхпроводимости и в области изучения взаимодействия электронов с тепловыми колебаниями ионной решетки металла. Из экспериментаторов упомяну также Н. Е. Алексеевского, автора ряда классических работ по физике металлов.

Я мог бы и дальше перечислять имена и работы ученых ИФП, но всех все равно не перечислю, поэтому остановлюсь. Скажу только, что, в общем, наши сотрудники — это яркие личности в науке.

— Что вы можете сказать о сегодняшнем молодом поколении ученых ИФП?

— Петр Леонидович Капица неоднократно подчеркивал, что настоящий ученый не может работать без молодежи. Он был одним из основателей Московского физико-технического института — вуза нового типа, призванного воспитывать будущих ученых. Связи с этим вузом у нас традиционно крепки. Ежедневно в лабораториях и на научных семинарах в ИФП можно увидеть студентов и аспирантов «физтеха». Со времени основания МФТИ наш институт является базовым для кафедры физики низких температур. Лучшие студенты этой кафедры, проявившие себя в процессе обучения, оставляются в нашем институте стажерами, а затем и аспирантами. Лучших из лучших мы после аспирантуры зачисляем в штат.

К сожалению, подобная практика работы с молодежью не повсеместна. В нашей стране в настоящее время сложилась такая ситуация, что Академия наук — высший научный орган страны — очень сильно отдалилась от высшего образования. В то же время во многих странах, в особенности в США, Канаде, Англии, Японии, наука делается в большой степени в научных учреждениях, которые являются лабораториями университетов. При этом на одного научного сотрудника приходится два-три аспиранта и несколько студентов. У нас в институте это соотношение значительно хуже — на пятьдесят сотрудников приходится около тридцати стажеров, аспирантов и студентов. Но по сравнению с другими научными учреждениями страны это еще очень хорошо.

Я считаю, что если зрелый научный сотрудник работает без молодежи, без учеников, то он очень скоро теряет свою форму. При тесной работе с молодежью сказывается эффект обратной связи, причем роль его может оказаться куда более важной, чем просто обучение. Процесс обучения всегда связан с более глубоким пониманием предмета самим обучающим. А потом, именно молодежь находит новые пути в науке. Так и у нас, за последние 10—15 лет ряд выпускников физтеха, ставших сотрудниками ИФП, создали новые научные направления, о некоторых из них я упоминал выше.

И вот еще что я хотел сказать. Очень много сейчас говорят о внедрении научных достижений в технику, практику, в жизнь. Это, несомненно, одна из главных задач сегодняшнего дня. Но что касается фундаментальных наук, то, с моей точки зрения, здесь важнейшим внедрением является передача накопленных знаний, всего накопленного опыта. Фундаментальная наука — это как раз то, что хранится в первую очередь в мозгах ученых и передается из одного поколения в другое.

— К какой области физики относятся ваши научные интересы?

— На этот вопрос ответить очень просто. Мои интересы лежат в области магнетизма и низких температур. Трудно сказать, что перевешивает,— в разные годы по-разному. Я всегда старался, еще когда был студентом, брать пошире. Считаю, что нельзя долго заниматься одним узким вопросом, потому что, когда к чему-то привыкаешь, резко падает вероятность сделать что-то новое, неожиданное. Возникает ощущение завершенности, полной ясности. А это — застой.

— В каких областях физики, по вашему мнению, можно ожидать значительных результатов в ближайшем будущем?

— Известно, что такой крупнейший физик как Резерфорд считал, что энергия атома никакого применения в нашем веке не найдет. Я думаю, что предсказывать что-то в наше время не-

*) О принципе работы туннельного микроскопа рассказывалось в «Кванте» № 7 за этот год (с. 19) (*Примеч ред*)

возможно. Ярким примером, предостерегающим от прогнозов, является сегодняшний «бум» с высокотемпературной сверхпроводимостью.*)

— Как вы можете прокомментировать последние достижения в этой области?

— Сверхпроводимость, о которой сейчас идет речь, чрезвычайно интересна как с точки зрения фундаментальной науки, так и, главным образом, с точки зрения открывающихся перспектив технических применений. Перед физиками стоит непростая задача объяснить природу обнаруженной высокотемпературной сверхпроводимости в новых материалах. Сегодня уже всем ясно, что она отличается от привычной, есть несколько альтернативных гипотез о механизме обнаруженной высокотемпературной сверхпроводимости, но однозначного решения проблемы пока нет. Может быть, вскоре удастся повысить температуру перехода в сверхпроводящее состояние еще на 100—200 К. Теперь уже нет причин отрицать эту возможность. Но уже и достигнутые успехи открывают невиданные перспективы. В ближайшие несколько лет, может быть пять — семь, благодаря обнаруженному явлению совершится колоссальный переворот во многих областях техники. Но для его реализации нужны специальные кадры — не те, что занимаются физическими проблемами, а кадры химиков-технологов, которые ищут новые материалы. Деятельность их порой даже «антинаучна», т. е. ход мысли этих ученых невероятен с точки зрения обычного научного подхода. В качестве примера я могу привести шутку, которую мне недавно рассказал нидерландский физик-теоретик Хендрик Казимир. Он долгое время работал в исследовательских лабораториях радиотехнической фирмы и хорошо разбирается в инженерном деле. Эта шутка, в каком-то смысле, отражает способ мышления технологов. Долгое время не удавалось напылить франций на германий. И тогда Казимир сказал, что необходимо в качестве промежуточного слоя поместить рений. Логика выбора рения состояла в том, что... между Францией и Германией в качестве «скрепляющего» природного элемента протекает Рейн.

Суть дела в том, что у технологов, создающих новые материалы, свое видение, иногда очень странное (с точки зрения физика), какие-то свои условные фигуры, своя, не всем понятная, логика — тем не менее приводящая к цели. Как во всяком творчестве, особенно связанном с поиском, здесь оказывается очень важным, помимо прочего, иметь какое-то специфическое чутье. Надо сказать, что на Западе такие ученые идут, что называется, номером один. Я думаю, что и у нас где-то, скажем, в металлургии, известны подобные уникумы. А вот в области физики назвать таких я затрудняюсь. И не потому, что их нет. Уверен, что есть. Но их не примечают, не выделяют. Это большой недостаток в организации нашей науки.

— Когда вы обнаружили у себя интерес к физике? Было ли что-нибудь запоминающееся в школьные, студенческие годы в плане вашего становления как физика?

— Мне трудно ответить на первый вопрос, потому что у меня и отец, и мать — физики. Отец многим занимался дома. Сначала это была вакуумная техника. Он был очень хорошим стеклодувом и почти все приборы делал своими руками, дома. Когда мне было лет шесть, он делал первые детекторные радиоприемники... Так что выделить какой-то особый момент я затрудняюсь, скорее всего это было «в крови». Мой старший брат пошел учиться в Ленинградский политехнический институт, что также сказалось на моем выборе. Я могу похвастаться, что десяти лет отроду слушал лекции знаменитого Паули на съезде русских физиков. Я, конечно, ничего не понял, просто родителям некуда было меня деть, а теперь могу гордиться этим событием в моей жизни.

До седьмого класса я учился в Ленинграде, потом мы переехали в Москву. Большинство наших учителей преподавали еще в старой гимназии. В целом это были очень хорошие учителя. Вообще, профессия учителя очень трудная. Она требует таланта. Ведь чтобы удержать внимание класса в течение целого урока, несомненно нужен особый талант.

У меня был очень хороший друг, с которым почти каждый вечер мы ходили в библиотеку Политехнического музея. А кроме того, мы с ним вече-

*) Об открытии высокотемпературной сверхпроводимости можно прочесть в майском номере «Кванта» (с. 44). (*Примеч. ред.*)

рами, а иногда и ночами, экспериментировали в школе. Больше по химии. Бывало, пожарные приезжали...

Мои студенческие годы — я учился в МГУ — разбились войной. Они мне очень памятны.

В университете у нас была очень хорошо поставлена математика. Курс анализа нам читал профессор И. В. Арнольд. Он был просто артист, настоящий художник, мы восхищались его лекциями. У нас был замечательный профессор и по дифференциальной геометрии — А. П. Норден. Это был такой педант! Он начинал записи на лекции в верхнем левом углу доски, а последнюю формулу записывал к концу второго часа в правом нижнем углу. Читал очень хорошо. Лекции по физике вел профессор А. Б. Млодзеевский, и мне они не очень нравились. А вот физический практикум был очень интересный. Его вели В. И. Иверонова и М. П. Шаскольская.

Моим непосредственным научным руководителем был Петр Георгиевич Стрелков. У него было два удивительных достоинства. Во-первых, он был очень искусным экспериментатором, а во-вторых, он предоставлял нам большую свободу в работе, поощрял нашу самостоятельность. Он очень вдохновлял нас, пропагандировал наши первые успехи, всячески способствовал нашему самоутверждению в науке. Этот человек мне очень много дал, и я ему очень благодарен. Из нашей учебной группы шесть человек были прикреплены к Институту физических проблем. Я считаю, что мне очень повезло, что еще в студенческие годы я попал в институт П. Л. Капицы. Петр Леонидович создал в Институте физических проблем особый климат, удивительно благоприятный для научного творчества и особенно — для воспитания молодежи. Это был климат, в котором на первом месте в жизни стояла любовь к науке — стремление к научному поиску. Все мы посещали необыкновенный семинар, которым руководил Александ Иосифович Шальников. Доклады на семинаре носили методический характер и растягивались иногда на месяц, а то и больше. По ходу возникали разные вопросы, и мы все очень внимательно их разбирали, обсуждали... А Александр Иосифович непрерывно задавал каверзные вопросы, заставлял нас на ходу объяснять все тонкости установки, о которой рассказывал докладчик, и придумывать конструкции новых приборов. Благодаря его темпераменту все дискуссии проходили очень бурно.

Потом я работал в Московском государственном институте мер и измерительных приборов (МГИМИП'е), и в этом была, я думаю, своя польза. Я был совершенно самостоятелен в выборе направления исследований, в создании лаборатории, я все начинал сам сначала. А в ИФП я «вернулся» в 1956 году.

— Каковы ваши жизненные увлечения помимо физики?

— Очень люблю путешествовать. Раньше это были путешествия с рюкзаком — 40 кг за спиной и две недели палаточной жизни... Урал, Памир, Алтай, Кавказ — мы много исходили. Много путешествовали с женой на байдарке.

Увлекался радио — спаял четыре телевизора; занимаюсь фотографией.

— Какой путь молодого человека, решившего посвятить себя физике, представляется вам наиболее эффективным?

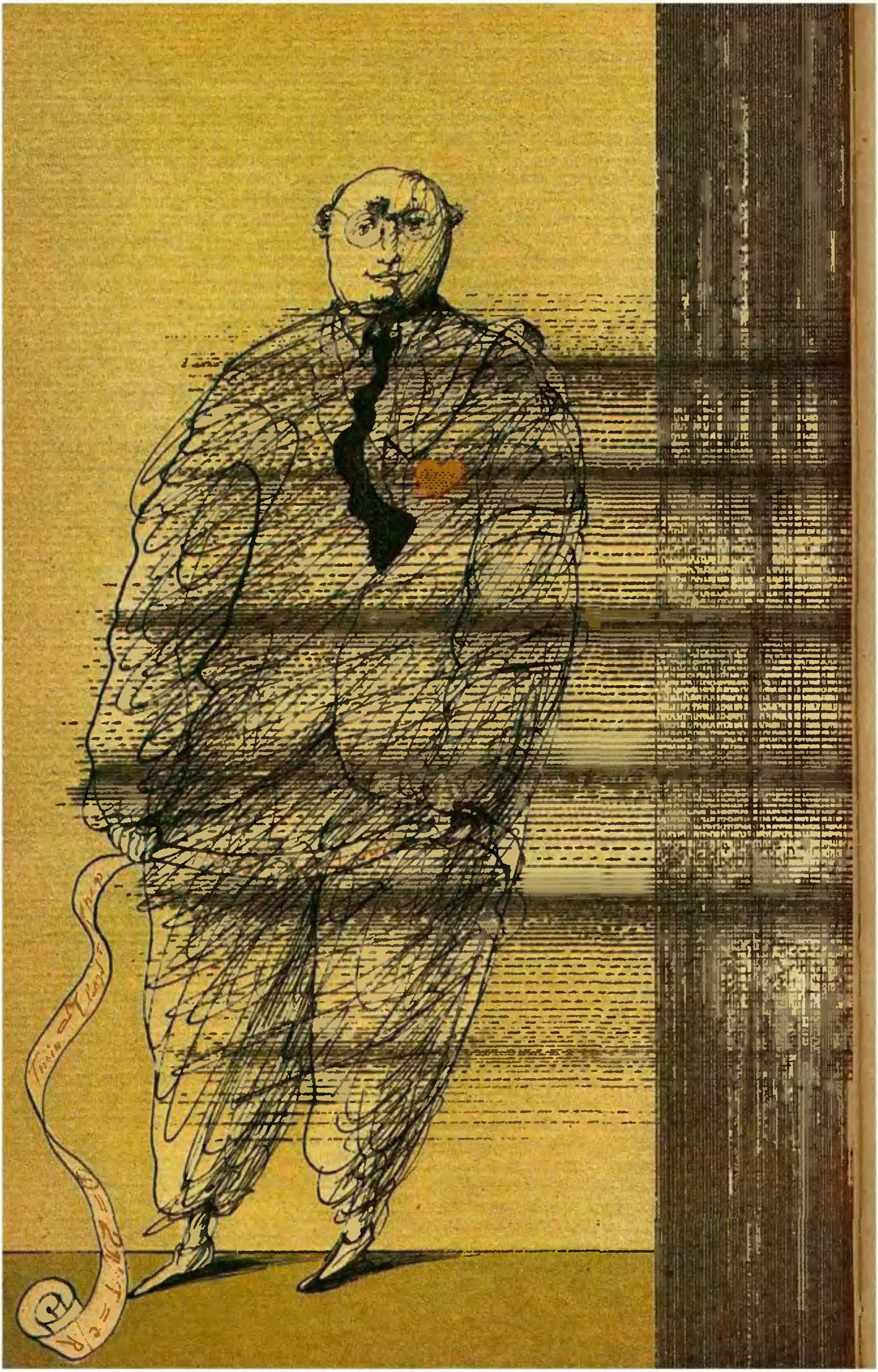
— Главное — по своему опыту сужу — чтобы было больше хорошей научно-популярной литературы. Я со школьных лет помню книгу Роберта Милликена об измерении заряда электрона. Ее стоило бы переиздать. Вообще было бы замечательно, если бы популярную литературу писали ведущие ученые, чтобы наука попадала к любознательным, что называется, из первых рук. Но всем сейчас некогда. Вот если бы появился современный Я. И. Перельман.

Очень важным делом я считаю всякое «рукоделие» — радио, планеры, столярничанье, фото...

Было бы, несомненно, полезно, чтобы в ведущих вузах страны школьникам, хотя бы раз в месяц, читали лекции ведущие ученые.

Но все-таки главную роль в привлечении молодежи в науку должна играть научно-популярная литература. В этом смысле «Квант» — очень полезное дело. Раньше, когда сын был школьником, я читал его часто. И сейчас читаю и считаю, что журнал хороший, очень нужный. Лучшего, пожалуй, в этом ряду и нет.

Интервью вел С. С. Кротов



ВОЛНЫ В СЕРДЦЕ

Доктор физико-математических наук
А. С. МИХАЙЛОВ

Раз в секунду по сердцу пробегает автоволна — волна временного уменьшения разности потенциалов между наружной и внутренней сторонами мембраны сердечных клеток. Эта волна возбуждается периодически действующим источником, расположенным в сердечной мышце,— синусовым узлом, который представляет собой группу клеток, работающих в автоколебательном режиме. Распространяясь по сердцу, волна возбуждения вызывает сокращение сердечной мышцы — биологического насоса, перекачивающего кровь по сосудам. Прохождение по сердцу такой волны изменяет электрический потенциал различных участков тела. Регистрируя эти небольшие изменения на электрокардиограмме, можно судить о правильности сокращений сердечной мышцы.

На рисунке 1 показано, как распространяется волна электрического возбуждения по правому предсердию. Так выглядит нормальный режим работы сердца. Картина распространения волн в больном сердце может резко меняться. На смену редким волнам, регулярно отходящим от области синусового узла, приходят волны, быстро вращающиеся вокруг определенных центров. В таком состоянии, которое медики называют приступом пароксизмальной тахикардии, нормальные сокращения сердца нарушаются — оно бьется очень часто и «неправильно». Сокращения сердца как целого могут вообще прекратиться, так что будет происходить лишь хаотическое подергивание его отдельных участков — фибрилляция. Возникновение фибрилляции означает остановку работы сердца. Пароксизмальная тахикардия и фибрилляция являются основными причинами смертельных исходов при инфаркте миокарда.

Почему возникают тахикардия и фибрилляция? Каков механизм нарушения регулярной волновой картины в сердце? На эти вопросы дает ответ математическая теория волн в возбудимых средах. Мы же попытаемся качественно объяснить механизм возникновения опасных сердечных аритмий.

Волны возбуждения

Вы видели, как горит бикфордов шнур? Волна горения бежит вдоль шнура, не затухая. «Форму» такой волны можно представить в виде зависимости температуры от времени в различных точках вдоль пути распространения. При прохождении фронта горения происходит резкое, ступенчатое повышение температуры, а после израсходования запаса горючего в данном месте температура возвращается к начальному значению. Понятно, что при встрече две волны горения гасят друг друга.

Волны в живых организмах напоминают волну горения. Хорошим примером такой биологической волны служит импульс возбуждения, распространяющийся по нервному волокну. Этот электрический импульс бежит без затухания и искажений по нервному волокну диаметром менее 0,025 мм и длиной до 1,5 м с постоянной скоростью, составляющей обычно десятки метров в секунду. Нервное волокно — проводник,

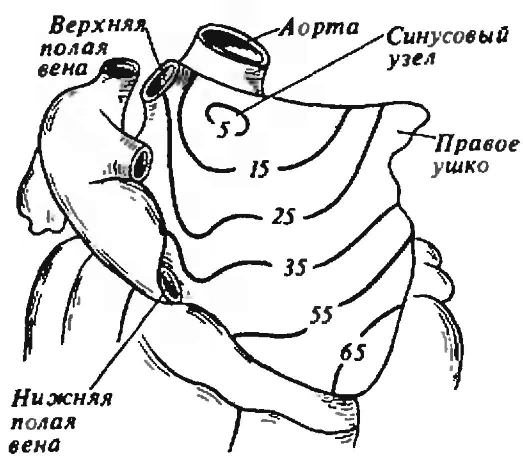


Рис. 1. Распространение волны электрического возбуждения по правому предсердию. Показаны последовательные положения фронта волны: цифрами указано время в миллисекундах

но очень плохой. Электрическое сопротивление на единицу его длины составляет примерно 10^9—10^{10} Ом/см, что в сто миллионов раз больше сопротивления медного провода того же диаметра. Если бы по мере движения нервного импульса к нему не подводилась непрерывно энергия, он бы затух очень быстро. Электрохимические механизмы, обеспечивающие подвод энергии и устойчивое распространение импульса, довольно сложны, и мы не будем их касаться.

Волны, распространяющиеся без затухания и сохраняющие свои характеристики постоянными за счет непрерывного подвода энергии извне, называют автоволнами. Наглядным аналогом автоволнового процесса служит распространение волны горения в среде, которая способна к последующему восстановлению своих свойств. Простейший пример подобного явления — это горение степи. При каждом прохождении волны пламени вся трава сгорает, но затем она медленно отрастает вновь, так что степь можно поджечь еще раз. Степь как «возбудимая среда» обладает свойством восстановления.

Отдельные мышечные волокна сердца по своим электрическим характеристикам аналогичны нервному волокну. Мышечная ткань сердца состоит из плотно переплетенных волокон, электрически связанных друг с другом в участках контакта. Импульс возбуждения может переходить с одного волокна на другое, так что волны возбуждения способны распространяться по сердечной ткани в любом направлении. В этом смысле сердечная ткань является возбудимой средой.

Аксиоматическая модель возбудимой среды

Летом 1945 года американский ученый Норберт Винер (тот самый Винер, который сформулировал основные положения кибернетики) гостил на даче у своего друга Артура Розенблюта, директора Мексиканского института кардиологии. К тому времени было уже хорошо известно, что по сердцу распространяются волны электрического возбуждения (они были открыты еще в начале нашего столетия) и что некоторые сердечные

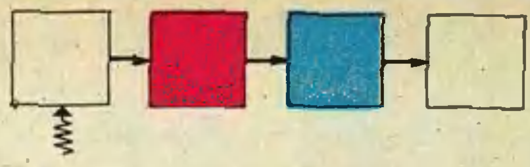


Рис. 2. Последовательность смены состояний элемента возбудимой среды: белым показано состояние покоя, красным — возбуждения, синим — рефрактерности.

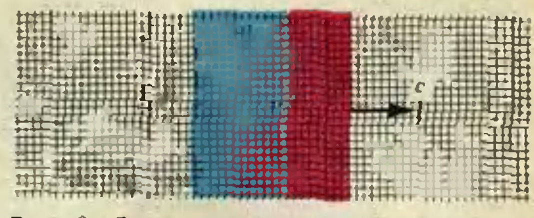


Рис. 3. Волна возбуждения в аксиоматической модели возбудимой среды.

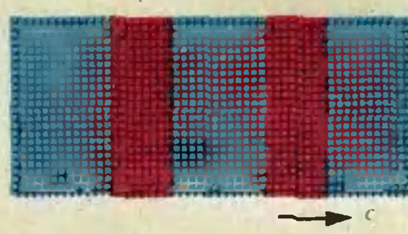


Рис. 4. Максимально частая последовательность волн возбуждения.

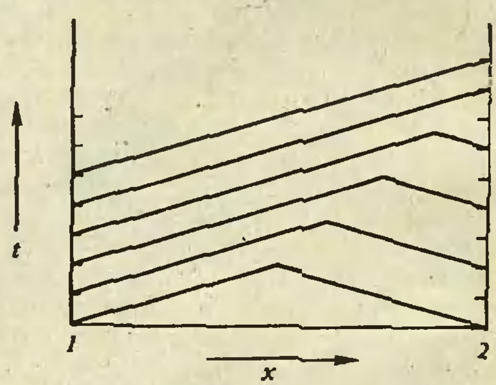


Рис. 5. Эффект подавления «медленных» источников. Показана временная развертка картины фронтов волн, испускаемых двумя источниками, которые имеют различные периоды. Левый высокочастотный подавляет правый низкочастотный источник. Вверх отложено время t, по горизонтали — координата x вдоль прямой, соединяющей центры двух источников.

аритмии связаны с циркуляцией волн возбуждения вокруг анатомических препятствий. Заинтересовавшись этим вопросом, Винер построил совместно с Розенблютом математическую модель, позволившую им в упрощенном виде объяснить основные особенности процессов в возбудимых средах.

В модели Винера и Розенблюта постулируется, что возбудимая среда образована сетью из элементов, каждый из которых способен пребывать в трех состояниях — покоя, возбуждения и рефрактерности; переходы между состояниями осуществляются скачком, подчиняясь определенным правилам.

Как реализуются эти состояния? В отсутствие внешних воздействий элемент неограниченно долго сохраняет состояние покоя. Внешним воздействием его можно перевести из этого состояния в состояние возбуждения. Пробыв определенное время $\tau_{возб}$ в таком состоянии, элемент переходит к состоянию рефрактерности, в котором он является невозбудимым. Состояние рефрактерности длится время $\tau_{реф}$; по прошествии этого времени способность к возбуждению восстанавливается — элемент переходит в состояние покоя. (Все эти переходы схематически изображены на рисунке 2.)

Дополнительное предположение модели состоит в том, что возбуждение может передаваться от возбуждаемых элементов к соседним, находящимся в состоянии покоя. В результате по среде распространяются волны возбуждения (рисунок 3). Скорость c распространения этих волн постоянна.

Модель Винера — Розенблюта задает определенное поведение волн возбуждения в среде.

1. Существует минимальный временной интервал следования волн возбуждения. Этот период T_{min} равен сумме длительностей состояний возбуждения и рефрактерности: $T_{min}=\tau_{возб}+\tau_{реф}$. Если волны следуют с минимальным периодом, т. е. с максимально возможной частотой, то все элементы среды находятся в двух состояниях: одни — в возбужденном, другие — в состоянии рефрактерности (рисунок 4). Минимальный пространственный интервал следования волн — $L_{min}=cT_{min}=c(\tau_{возб}+\tau_{реф})$.

2. При столкновении волны гасят друг друга. Это легко понять — ведь при столкновении возбужденные элементы оказываются «зажатыми» между двумя надвигающимися областями рефрактерности.

3. Волны возбуждения не отражаются от границ. Это утверждение доказывается аналогично предыдущему.

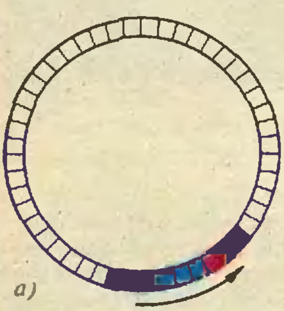
4. «Быстрые» источники волн подавляют деятельность всех более «медленных» источников. («Быстрые» — это источники, испускающие волны часто, через малые промежутки времени.) Убедимся в этом.

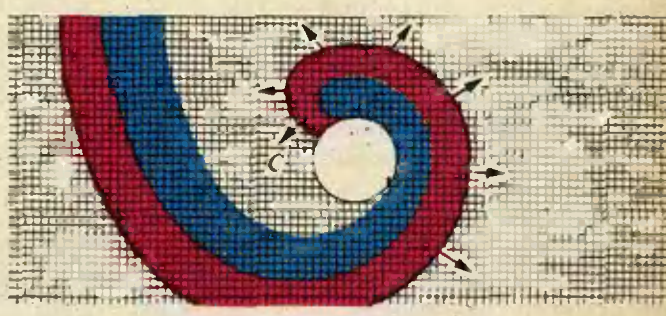
Пусть в среде имеются два периодически действующих источника, которые испускают волны через интервалы времени T_1 и T_2. На рисунке 5 изображена временная развертка картины волн от этих двух точечных источников. Левый источник испускает волны возбуждения чаще, чем правый (т. е. $T_1<T_2$). С течением времени точка встречи и гашения двух фронтов смещается в направлении к низкочастотному правому источнику, пока он не окажется полностью подавленным. Таким образом, по прошествии достаточно большого времени в среде «выживает» лишь самый «быстрый» из источников.

5. Волна возбуждения может неограниченно долго циркулировать по кольцу или вокруг отверстия в возбудимой среде.

Возьмем узкую полоску возбудимой среды и свернем ее в кольцо. Если длина полоски $l>L_{min}$, то по кольцу неограниченно долго может циркулировать волна возбуждения (рисунок 6,*а*). Период ее циркуляции $T=l/c$.

Станем теперь увеличивать внешний радиус кольца и устремим его к


а)



б)

Рис. 6. Циркуляция волны возбуждения. а) — одиночная волна, вращающаяся в кольце; б) — спиральная волна, вращающаяся вокруг отверстия в возбудимой среде.

бесконечности. Тогда вместо кольца мы получим отверстие в возбудимой среде (рисунок 6,*б*). Что произойдет с волной возбуждения в кольце, когда мы будем растягивать его таким образом? Она будет продолжать вращение, но ее фронт изогнется.

Действительно, фронт волны возбуждения не может представлять собой прямую радиальную линию, вращающуюся вокруг отверстия с какой-то угловой скоростью ω. Ведь в таком случае на расстоянии r от центра отверстия скорость фронта равнялась бы $c=\omega r$ и неограниченно возрастала с увеличением r. Однако скорость распространения волн c постоянна. Это означает, что удаленные участки фронта станут отставать, и он примет со временем форму спирали.

Таким образом, вокруг отверстия в возбудимой среде может сколь угодно долго вращаться без затухания спиральная волна. Период ее вращения — это время, затрачиваемое на прохождение импульса возбуждения по всему периметру l отверстия, т. е. $T=l/c$. Если отверстие круглое и радиус его R, то $T=2\pi R/c$, а частота вращения $\omega=2\pi/T=c/R$.

Итак, мы познакомились с моделью Винера — Розенблюта. Как же объяснить с ее помощью возникновение сердечных аритмий?

Спиральные волны и сердечные аритмии

Стенки предсердия достаточно тонкие, поэтому ткань сердца здесь можно считать двумерной возбудимой средой. В результате нарушения кровоснабжения после инфаркта миокарда небольшие области сердечной ткани могут отмирать, теряя способность к проведению волн возбуждения. Эти *области играют роль отверстий в возбудимой среде сердечной ткани.*

К чему приведет циркуляция волны возбуждения вокруг одного из этих отверстий? Ответ зависит от того, как соотносятся период циркуляции с частотой волн, испускаемых синусовым узлом. Если частота вращения спиральной волны выше, чем частота генерации волн синусовым узлом, то *спиральная волна является более* быстрым источником и подавляет деятельность синусового узла. Поскольку радиусы отверстий — пораженных

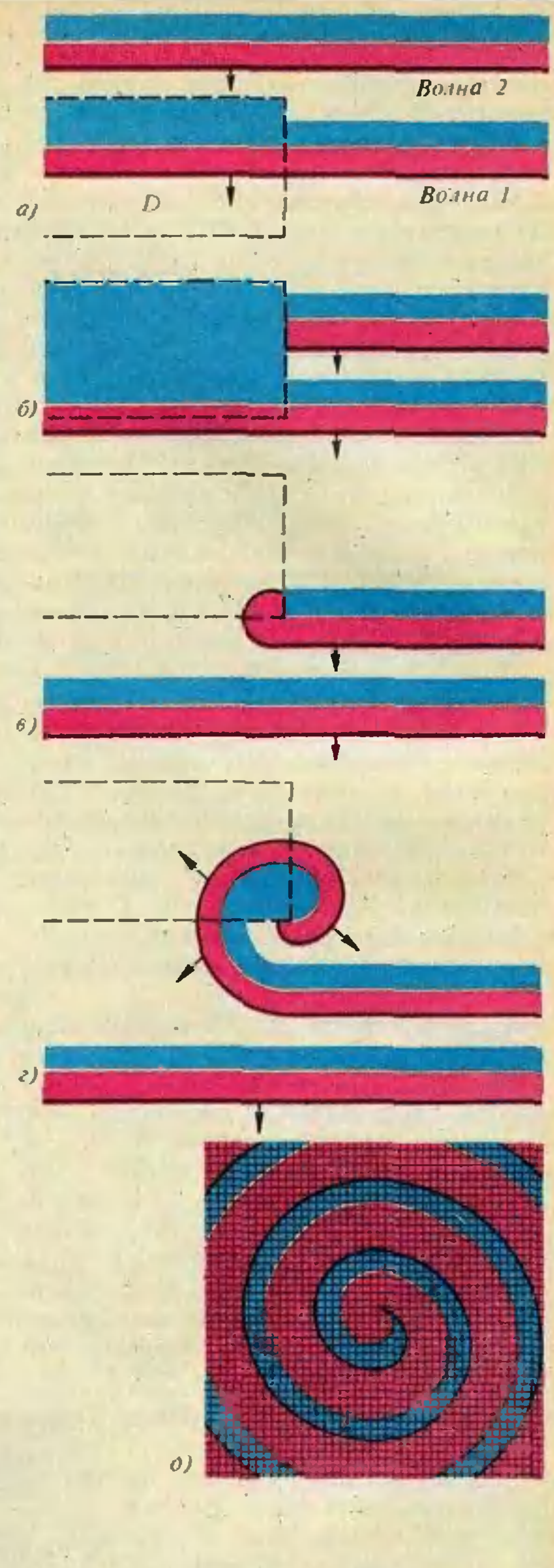


Рис. 7. Рождение спиральной волны (D — область с повышенной рефрактерностью). а) — исходное положение двух волн; б) — вторая волна не входит в область D, возник разрыв фронта; в) — возбуждение начинает распространяться внутрь области D; г) — возникла спиральная волна; д) — спиральная волна через достаточно большой промежуток времени.

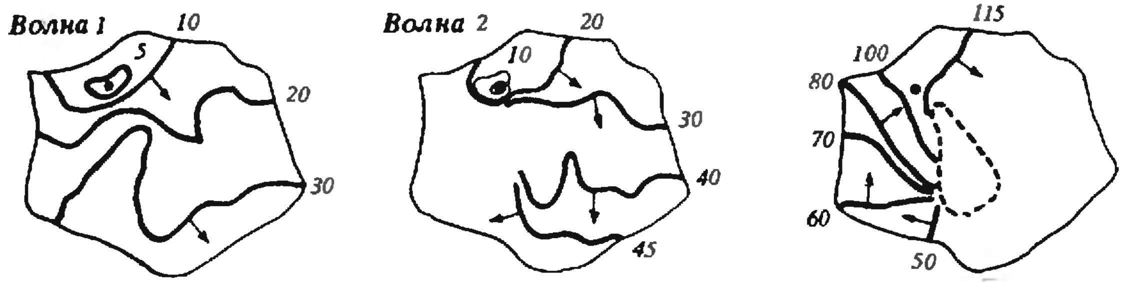


Рис. 8. Образование спиральной волны в полоске сердечной ткани кролика. Цифрами указано время в миллисекундах. Волна 2 рвется на области с повышенной рефрактерностью и образует спиральную волну. Из-за малого размера полоски в ней помещается лишь небольшая часть спирали.

участков сердца — достаточно малы, а частота циркуляции волны обратно пропорциональна радиусу отверстия, так обычно и происходит. Волна, вращающаяся вокруг отверстия, захватывает все предсердие. Нормальный режим работы сердца нарушается. На смену ему устанавливается «трепетание» предсердия, т. е. развивается сердечная аритмия.

Спиральные волны могут рождаться из разрывов фронта волн возбуждения. Предположим, что в среде имеется область D, элементы которой обладают повышенной длительностью рефрактерного состояния. Пусть по среде движутся подряд друг за другом две волны возбуждения, отделенные небольшим временным интервалом (рисунок 7,*а*). После прохождения первой волны через область D находящиеся в ней элементы надолго остаются в состоянии рефрактерности. Возбуждение от второй волны не может проникнуть в эту область — фронт волны рвется (рисунок 7,*б*). Через какое-то время состояние рефрактерности в области D закончится и элементы, находящиеся в этой области, вновь приобретут способность к возбуждению. Если к этому времени вторая волна еще не миновала область D, то возбуждение от фронта этой волны начнет распространяться внутрь области D (рисунок 7,*в*). Затем волна будет закручиваться вокруг области разрыва (рисунок 7,*г*), и с течением времени сформируется спиральная волна, показанная на рисунке 7,*д*.

Сердечная ткань неоднородна по своим свойствам, в том числе и по длительности рефрактерного состояния. Неоднородность еще более возрастает в результате нарушения нормального питания клеток после инфаркта. При обычном режиме работы сердца интервал между очередными волнами возбуждения составляет 1 секунду, а длительность рефрактерного состояния — порядка 0,1 с. Поэтому разброс в значениях рефрактерности, свойственный живой ткани, не приводит в обычных условиях к разрыву фронта волн возбуждения. При некоторых поражениях сердечной ткани, однако, в ней генерируется синусовым узлом дополнительная волна, отделенная от предыдущей очень малым временным интервалом. Если этот временной интервал достаточно короток (меньше суммы максимальной продолжительности рефрактерного состояния и длительности состояния возбуждения), фронт такой волны разорвется на границе области с повышенной рефрактерностью, и родится спиральная волна. На рисунке 8 показано образование спиральной волны из разрыва фронта в эксперименте с полоской ткани, взятой из сердца кролика.

Время жизни спиральной волны в неоднородной среде конечно. Из-за неоднородности среды центр волны со временем смещается, блуждает по среде. Рано или поздно волна выходит на границу среды и исчезает. С исчезновением спиральной волны приступ учащенного сердцебиения заканчивается.

Возможен, однако, и другой исход. На фронте волны возбуждения — на рукаве спиральной волны — могут образовываться вторичные разрывы при прохождении областей с повышенной рефрактерностью. В результате будет происходить размножение спиральных волн. Если скорость размножения волн превышает скорость их исчезновения на границах, число спиральных волн будет возрастать со временем, пока вся среда не будет заполнена короткими «обрывками» спиральных волн. Этот хаотический волновой режим наблюдается при фибрилляции — сокращения сердца как целого прекращаются и происходит лишь хаотическое подергивание отдельных его участков.

Экспериментально было установлено, что для возникновения фибрилляции необходимо превышение «критической массы» сердечной ткани: вплоть до некоторого размера полоски такой ткани создать в ней самоподдерживающуюся фибрилляцию невозможно. (Например, для ткани предсердий кролика критическая масса составляет около 20 мг.)

Этот эффект нетрудно объяснить. Если принять, что распределение рефрактерности по среде случайно, то вероятность рождения новой спиральной волны из разрыва фронта одной из уже существующих волн примерно одна и та же для любой точки среды. Полное число новых спиральных волн, рождающихся в среде за единицу времени, пропорционально площади, занимаемой средой, и числу уже имеющихся спиральных волн: $n_+ = \alpha L^2 N$, где L — линейный размер среды (мы считаем ее двумерной), N — число уже существующих волн, α — некоторый постоянный коэффициент. Число спиральных волн, которые за единицу времени исчезают на границах среды, равно $n_- = \beta N L$ (оно пропорционально длине границы), β — постоянный коэффициент. Хаотический режим, наблюдающийся при фибрилляции, соответствует ситуации, когда скорость размножения спиральных волн превышает скорость их исчезновения, т. е. когда $n_+ > n_-$. Как видно из приведенных выше рассуждений, это возможно в том случае, когда линейный размер среды L выше критического значения $L_{кр} = \beta/\alpha$. В средах меньшего размера размножение спиральных волн подавлено процессом их ухода на границы.

Зная механизмы возникновения опасных сердечных аритмий, можно гораздо успешнее искать способы борьбы с ними или их предотвращения.

* * *

В этой короткой статье нам пришлось ограничиться только самыми простыми и наглядными объяснениями. Аксиоматическая модель Винера — Розенблюта сыграла свою роль в создании теории автоволновых явлений. Большой вклад в развитие этой теории внесли советские ученые — физики, биологи, математики, медики. Модель Винера — Розенблюта была подробно исследована и развита в работах участников семинара, организованного в 60-х годах советским математиком И. М. Гельфандом. В настоящее время для описания волн в возбудимых средах, в том числе — в ткани сердца, используют более детальные модели, формулируемые на языке дифференциальных уравнений в частных производных. Однако модель Винера — Розенблюта продолжает оставаться полезной во всех случаях, когда необходимо быстро получить качественную картину интересующего нас эффекта.

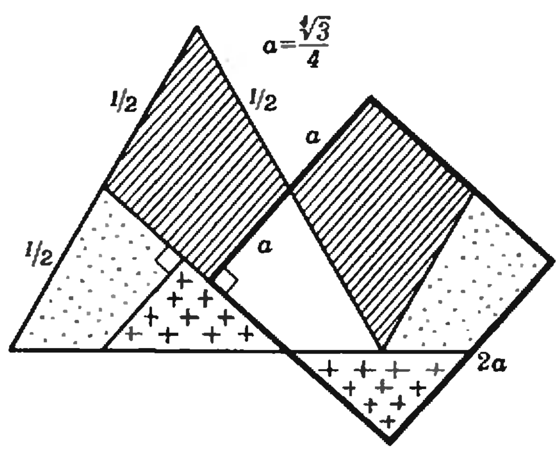
Возвращаясь к напечатанному

В «Кванте» № 7 на с. 3 допущена арифметическая ошибка при вычислении формулы (5). Должно быть

$$y^2(27y-26)=0,$$

а координаты рационального решения (в тексте и на рисунке 2) должны быть (17/9; 26/27).

В статье «Задачи на разрезание» на рисунке 1 (см. с. 45) показывается разрезание равностороннего треугольника на четыре части, из которых складывается ромб, а не квадрат. Конструкция, дающая квадрат, выглядит так:



РЕНЕ ДЕКАРТ И ЕГО «ГЕОМЕТРИЯ»

Кандидат физико-математических наук
А. В. ДОРОФЕЕВА

Восьмого июня 1637 г. в голландском городе Лейдене в типографии Жана Мэре появилась на свет книга с длинным по обычаю своего времени названием «Рассуждение о методе, позволяющем направлять разум и отыскивать истину в науках. Кроме того, Диоптрика, Метеоры и Геометрия, которые являются приложениями этого метода». Автора этой книги звали Рене Декарт. Ему шел тогда сорок второй год и он по праву считался одним из крупнейших в Европе математиков; однако «Рассуждение о методе» было его первым печатным трудом. Впереди у него были еще тринадцать лет жизни, удивительные сочинения, но даже одной небольшой части первого печатного труда — геометрии — оказалось достаточно, чтобы навсегда обессмертить его имя. Вместе с «Геометрией» Декарта в науку вошел метод координат.

Рене Декарт в юности.

Жизненный путь

Декарт родился в 1596 г. в провинции Турень на юге Франции в семье, принадлежащей знатному, но обедневшему роду. В 1597 г. умерла его мать. Когда Рене исполнилось восемь лет, отец отправил его в коллеж г. Ла-Флеш, незадолго до этого открытый католическим орденом иезуитов для просвещения привилегированного дворянства.

В течение первых пяти лет в коллеже преподавали латинский и греческий языки, историю, литературу, а затем в течение трех лет — философию, логику, математику и физику. Вспоминая годы учебы, Декарт в «Рассуждении о методе» писал:

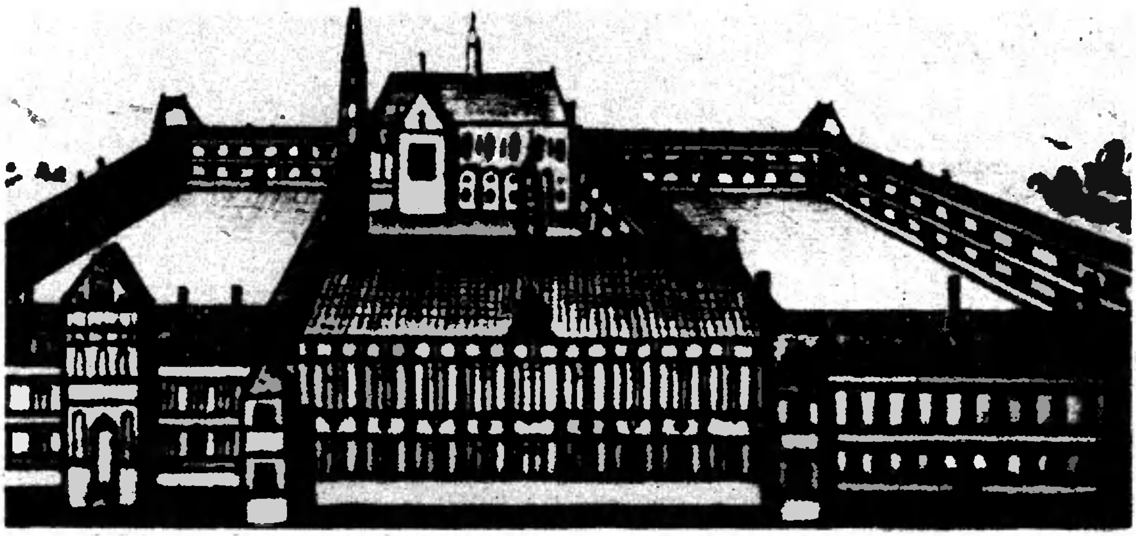
«Я изучал там все, что изучали другие, и, не довольствуясь преподаваемыми сведениями, пробегал все попадавшие мне под руки книги, трактовавшие о наиболее редкостных и любопытнейших науках... Особенно нравилась мне математика верностью и очевидностью своих рассуждений».

Он рано начал проявлять необычайную самостоятельность суждений.

«Признаюсь, я родился с таким умом, что главное удовольствие при научных занятиях для меня заключалось не в том, что я выслушивал чужие мнения, а в том, что я всегда стремился создать свои собственные».

Прилежно изучая все, что предлагала школа, прочитывая самостоятельно попадавшие к нему научные книги, юный Декарт в то же время испытывал глубокое разочарование. Он сомневался в достоверности полученных знаний. Обучение в школах и университетах было в то время схоластическим. Оно предполагало веру в церковное учение, наследие античности, научные авторитеты, имена, догмы.

Окончив коллеж в 1614 г., юноша обдумывал план дальнейшей жизни.


Коллеж, в котором учился Декарт.

В путешествиях, наблюдениях, экспериментах, размышлениях он видел путь, который приведет его к познанию тайн природы. Декарт писал впоследствии:

«Я совсем оставил книжные занятия и решился искать только ту науку, которую мог обрести в самом себе или же в великой книге мира, и употребил остаток моей юности на то, чтобы путешествовать, увидеть дворы и армии, встречаться с людьми разных нравов, положений и собрать разнообразный опыт, испытать себя во встречах, которые пошлет судьба, и повсюду поразмыслить над встречающимися предметами так, чтобы извлечь какую-нибудь пользу из таких занятий».

По окончании коллежа Декарт некоторое время провел в семье отца, а затем отправился в Париж, где вначале вел обычную для молодого и знатного дворянина светскую жизнь. Вскоре наступил перелом — Декарт уединился в предместье Парижа Сен-Жермен и предался занятиям наукой. В 1616 г. он получил в Пуатье степень бакалавра права.

В 1618 г. Декарт вступил добровольцем в армию, сражавшуюся против общего врага Франции и Голландии — испано-австрийских войск. С 1619 г. он нес военную службу в армии герцога Баварии. В 1620 г. Декарт находился в Богемии, в следующем году в Венгрии. В это время он принял решение оставить военную службу и вернулся во Францию, посетив Германию и Голландию.

Навестив отца, Декарт продолжил свои странствия. Он побывал в Швейцарии и Италии и, таким образом, в полной мере осуществил задуманный в юности план общеобразовательных путешествий. С 1625 г. Декарт обосновался в Париже. Все эти годы он постоянно встречался с учеными, главным образом, математиками и философами, а также с мастерами-практиками, изготовлявшими оптические инструменты.

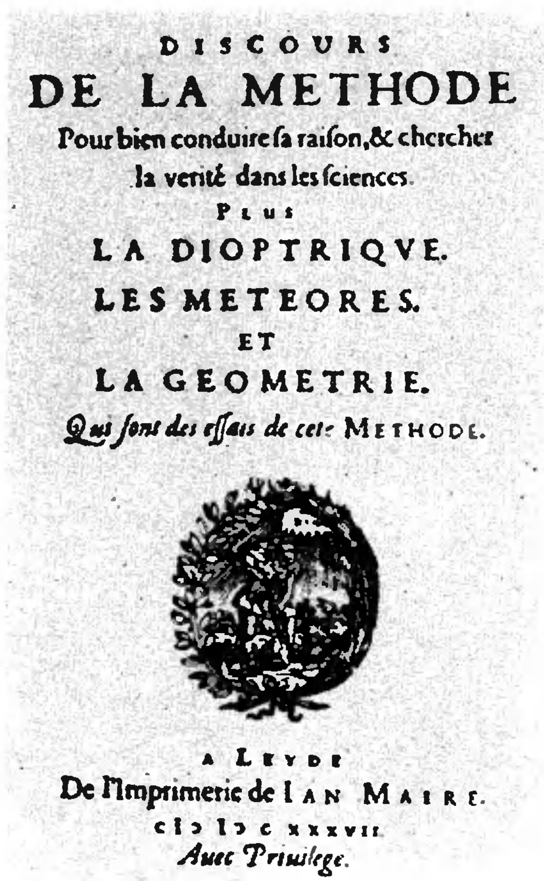
В Париже Декарт разработал основы своего научного метода. Слава молодого ученого быстро росла. О нем говорили как о создателе новой философской системы. Декарт почувствовал необходимость полного уединения, чтобы завершить исследования. Он решил, «удалиться от всех мест, где мог иметь знакомства».

В 1628 г. Декарт переехал в Голландию, переживавшую тогда пору экономического и культурного расцвета. Ее моряки совершали дальние путешествия. В стране росли морские порты и крупные города, развивались ремесла, возникали университеты. В типографиях Голландии печатались лучшие научные труды, в том числе сочинения Коперника, «Диалоги» Галилея. А главное, страна отличалась необычной в то время религиозной терпимостью и значительной свободой от цензуры.

Декарт прожил в Голландии двадцать лет, заполненных непрерывным трудом. Его время распределялось так: утром — продолжительные размышления и решение математических задач, затем опыты по оптике, анатомии, медицине, ботанике, вечерами — письма. Он вел обширную переписку с выдающимися учеными Франции и Голландии.

Результаты философских раздумий и естественнонаучных экспериментов Декарт изложил в ряде сочинений, которые принесли ему широкую известность. Он отдавал много сил пропаганде учения, стремясь распространить его в школах и университетах Голландии. Новизна и смелость научных идей все-таки привели Декарта к столкновению с протестантскими богословами. Он был вынужден покинуть Голландию.

В 1649 г. Декарт принял предложение шведской королевы Христины, желавшей собрать при своем дворе выдающихся ученых Европы. В одном из писем он говорил о том, как трудно человеку, «родившемуся в садах Турени», переехать в Швецию — «страну медведей, снегов и льдов». Вскоре после переезда Декарт простудился, заболел воспалением легких. 11 февраля 1650 г. он умер. В 1663 г. сочинения Декарта были внесены в список книг, запрещенных католической церковью. Несмотря на это, научные идеи Декарта быстро распространялись по Европе, оказывая глубокое воздействие на умы его современников.



DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher
la verité dans les sciences.
Plus
LA DIOPTRIQUE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIƆ IƆ C XXXVII.
Avec Privilege.

Титульный лист первого издания «Рассуждения о методе».

Основоположник нового научного метода

В «Рассуждении о методе» Декарт сформулировал «главные правила метода» и отметил: «Я принял твердое решение постоянно соблюдать их без единого отступления». Вот эти правила.

Первое: не принимать за истинное что бы то ни было, прежде чем не признал это несомненно истинным, т. е. старательно избегать поспешности и предубеждения и включать в свои суждения только то, что представляется моему уму так ясно и отчетливо, что никоим образом не может дать повод к сомнению.

Второе: делить каждую из рассматриваемых мною трудностей на столько частей, на сколько потребуется, чтобы лучше их разрешить.

Третье: руководить ходом своих мыслей, начиная с предметов простейших и легко познаваемых, и восходить мало-помалу, как по ступеням, до познания наиболее сложных, допуская существование порядка даже среди тех, которые в естественном порядке вещей не предшествуют друг другу.

И последнее: делать всюду настолько полные перечни и такие общие обзоры, чтобы быть уверенным, что ничего не пропущено».

Декарт подчеркивал, что в основе научной теории должны лежать ясные и простые принципы. Необходимо изучать, описывать, классифицировать явления природы, проводить эксперименты и математические расчеты. Изучая природу, нужно полагаться лишь на свои силы, а не ждать помощи свыше, божественного откровения. Эти взгляды ученого были несовместимы с теологией и схоластикой.

К сочинению «Рассуждение о методе» Декарт написал три приложения, которые должны были разъяснить и проиллюстрировать его научный метод,— «Диоптрику», «Метеоры» и «Геометрию». Проблемы опти-

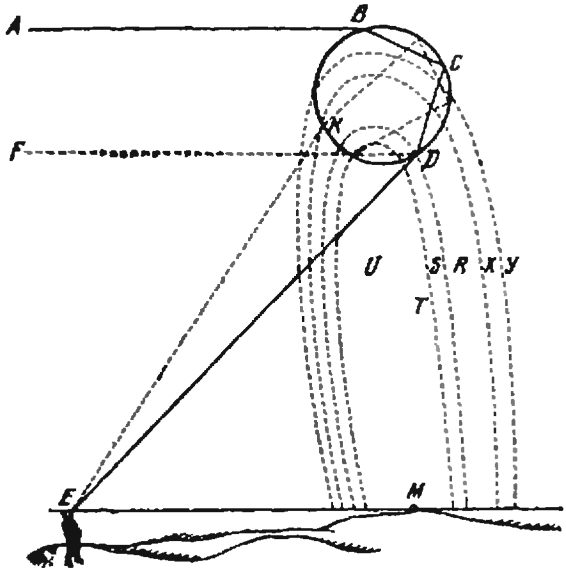


Рис. 1.

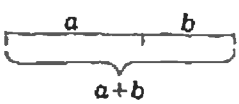


Рис. 2.

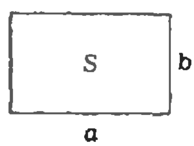


Рис. 3.

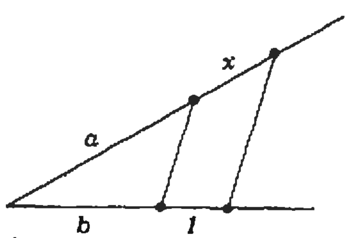


Рис. 4

Рис. 5.

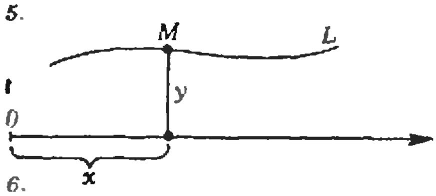


Рис. 6.

ки, теории метеорологических явлений, математики были тесно связаны с практическими задачами, стоящими в то время перед мореплавателями, инженерами, астрономами, мастерами по изготовлению оптических инструментов.

«Диоптрика» и «Метеоры»

В начале XVII столетия в науку вошли зрительные трубы и микроскопы, открывшие широчайшие возможности проникновения в просторы вселенной и в тайны микромира. Внимание ученых привлекли теоретические основы оптики. Голландец В. Снеллиус (1580—1620) открыл закон преломления света на границе двух сред и излагал его в лекциях, которые он читал в Лейденском университете. Этот же закон Декарт открыл, по-видимому, независимо от Снеллиуса, опубликовал и обосновал в своей «Диоптрике». Используя его, он создал теорию радуги.

В «Метеорах» Декарт объяснил происхождение радуги благодаря тому, что правильно построил ход лучей в дождевой капле (см. рисунок 1, принадлежащий Декарту). Эти объяснения, дополненные Ньютоном, приводятся во всех современных учебниках. Декарт проводил эксперименты со сферическим стеклянным сосудом, помещенным на солнце, и на их основе *построил свою теорию цветов*. Если для наблюдателя, находящегося в точке E (см. рис. 1), луч DE образует с солнечным лучом FD угол, примерно равный 42°, то эта часть сосуда кажется наблюдателю яркокрасной; при уменьшении угла появляются другие цвета радуги. Наряду с Кеплером, Гюйгенсом и Ньютоном Декарт является создателем современной оптики.

В приложении «Метеоры» ученый стремился выяснить законы образования облаков, снега, града, молнии, исследовать природу ветра. Он не мог сколько-нибудь полно решить поставленную перед собой задачу уже потому, что в ту эпоху еще ничего не знали об электрических явлениях. Главная заслуга Декарта заключается в том, что он объяснял явления природы с помощью науки, не оставляя места домыслам, предрассудкам и суевериям.

«Геометрия» Декарта

Это третье приложение к «Рассуждению о методе» обессмертило имя ученого в большей степени, чем другие его открытия. Декарт создал *метод координат*, с помощью которого установил тесную связь геометрии и алгебры. Его метод учил решать алгебраические задачи с помощью геометрии и, наоборот, использовать теорию алгебраических уравнений при решении геометрических задач.

Основной элемент «Геометрии» — отрезок. Если к отрезку a приложить отрезок b, то получится новый отрезок $a+b$ — сумма отрезков a и b (рис. 2). А как определить *произведение* отрезков ab? У древних греков ab — это площадь прямоугольника со сторонами a и b (рис. 3). Декарт нарушил эту многовековую традицию, приводящую ко многим неудобствам. У него ab — это тоже отрезок; он находится из пропорции $x/a=b/1$. На рисунке 4 показано, как Декарт построил отрезок $x=ab$. Аналогично из пропорции $x/1=a\ /\ b$ видно, как можно *разделить* отрезок a на отрезок b.

Декарт ввел *ось абсцисс* — прямую, на которой отмечена точка O, являющаяся началом отсчета, и выбрал некоторый отрезок за единичный (рис. 5). С его помощью можно измерить длину любого отрезка. Значит, у Декарта каждому отрезку соответствует положительное число — его длина. Он проводит операции с отрезками, а по существу,— это операции с положительными действительными числами: длины отрезков складываются, перемножаются, длина одного отрезка делится на длину другого.

Наличие оси абсцисс позволяет установить связь между линиями и уравнениями. Пусть $F(x, y)=0$ — *алгебраическое уравнение* *), например, $3y-2x-6=0$. Отложим на оси абсцисс отрезок, длина которого равна x. Из уравнения $F(x, y)=0$ найдем соответствующее значение y и отложим его на прямой, перпендикулярной оси. Получаем точку M (рис. 6). Числа x и y называются *координатами* точки M.

Если значения x меняются, то меняются соответствующие значения y, и точка M при своем движении описывает некоторую линию L.

Вывод Декарта: алгебраическому уравнению $F(x, y)=0$ соответствует некоторая линия L на плоскости.

Например, нашему уравнению $3y-2x-6=0$ соответствует *прямая*, уравнению $xy-1=0$ — гипербола.

До исследований Декарта отрицательные числа встречались в математике лишь при решении алгебраических уравнений. Они не были равноправны с положительными числами. Метод координат привел Декарта к геометрической интерпретации отрицательных чисел.

*) То есть уравнение вида $F=0$, где F — многочлен.

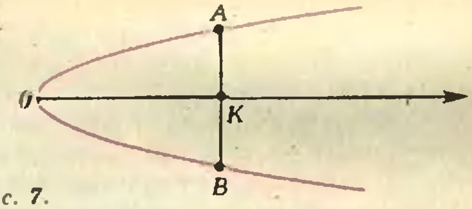


Рис. 7.

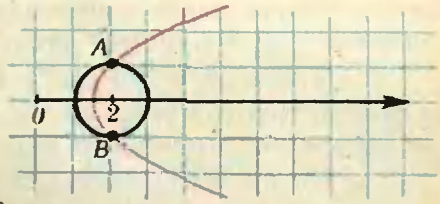


Рис. 8.

Рассмотрим уравнение $y^2=x$. Каждому положительному числу x здесь соответствуют два значения y. Соответствующая линия изображена на рисунке 7. Отрезки AK и KB лежат по разные стороны от оси абсцисс. Они наглядно убеждают нас в том, что отрицательные координаты имеют такое же право на существование, как и положительные.

Основная идея геометрии Декарта состоит в том, что геометрические свойства линий можно выяснить, производя алгебраические преобразования их уравнений. Например, чтобы найти точки пересечения окружности $(x-2)^2+y^2=1$ и параболы $y^2=2x-3$, нужно решить систему

$$\begin{cases}(x-2)^2+y^2=1,\\ y^2=2x-3.\end{cases}$$

Используя приемы алгебры, получаем $(x-2)^2+2x-3=1$. Отсюда $x_1=0$, $x_2=2$. Затем находим $y^2=-3$ или $y^2=1$.

Уравнение $y^2=1$ имеет два корня: $y_1=1$ и $y_2=-1$. По терминологии Декарта, $y_1=1$ — «истинный» корень, а $y_2=-1$ — «ложный» корень. Но, как показывает рисунок 8, с точки зрения геометрии оба корня совершенно равноправны.

Уравнение $y^2=-3$, по терминологии Декарта имеет два «воображаемых» корня. Так он называл комплексные числа (см. о них статью Л. С. Понтрягина в «Кванте» № 2, 1985).

«Воображаемым» корням не соответствуют никакие точки на рисунке 8. Зачем же тогда о них говорить? Что они дают математике? На эти вопросы Декарт ответил так: с помощью «воображаемых» корней можно построить общую теорию алгебраических уравнений.

В «Геометрии» Декарт изложил и свою теорию алгебраических уравнений. Он начал ее с указания, что их удобнее всего записывать в форме, ставшей теперь для нас привычной,— с правой стороны равной нулю:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=0.$$

Он сформулировал теорему о том, что алгебраическое уравнение степени n имеет ровно n корней, если учитывать положительные, отрицательные и комплексные («воображаемые») корни. Это основная теорема алгебры, которую до Декарта, в начале XVII века, высказали П. Роте и А. Жирар.

Декарт первым стал обозначать данные величины начальными буквами алфавита a, b, c, неизвестные — последними буквами x, y, z. Он упростил обозначение степеней, и оно приняло знакомый нам вид a^3, x^2 и т. п.

Распространение и влияние «Геометрии»

Сочинение «Рассуждение о методе» было опубликовано в 1637 г. на французском языке. Современники Декарта восприняли его «Геометрию» с большим энтузиазмом. Вскоре она была переведена на латинский язык — международный язык науки той эпохи. За короткое время «Геометрия» выдержала четыре издания. В семнадцатом столетии она была настольной книгой каждого творчески работающего математика.

Декарт считал, что математика должна изучать лишь кривые, заданные алгебраическими уравнениями, потому что для исследования других линий нет общего метода. Примером алгебраической кривой может служить декартов лист. Его уравнение $x^3+y^3-3ax\,y=0$, $a\neq 0$. Между тем в математике большую роль играют и неалгебраические (трансцендентные) кривые: спираль Архимеда, квадратриса, трактриса, циклоида и другие. Декарт не включил их в свою «Геометрию».

Это ограничение Декарта преодолели Ньютон и Лейбниц, разработавшие во второй половине XVII века общие приемы исследования трансцендентных кривых. С помощью метода координат они стали изучать синусоиду, логарифметическую, показательную и другие функции.

Метод координат плодотворно развивался дальше. Вскоре появилась ось ординат, а в XVIII веке и стереометрия; в XIX веке возникла «многомерная» геометрия, «бесконечномерная» геометрия в XX веке. Сегодня без метода координат невозможно себе представить ни математику, ни физику.

Труды Декарта, его философские, математические и космологические идеи вызывают глубокий интерес и обсуждение в наши дни. В этом его величие ученого.

Задачи на исследование

Предлагаем читателям несколько задач о средних величинах проекций многоугольников и многогранников. С их помощью можно, в частности, получить решение задачи M1030, отличающееся от помещенного в «Кванте» № 6.

а) Обозначим через $p_M(l)$ длину проекции выпуклого многоугольника M на прямую l. Докажите, что среднее значение $p_M(l)$ по всем прямым, проходящим через заданную точку, равно p/π, где p — периметр многоугольника M. (По определению, это среднее значение равно

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_M(l_\alpha)d\alpha,$$

где l_α — прямая, составляющая с фиксированной осью l_0 угол α.)

В следующих двух задачах рассматриваются средние по всем направлениям в пространстве; о том, что под ними понимается, рассказывалось в статье Ю. Ионина и А. Плоткина «Среднее значение функции» («Квант», 1977, № 7, с. 26).

Обозначим через $s_M(P)$ и $t_M(l)$ соответственно площадь проекции выпуклого многогранника M на плоскость P и длину его проекции на прямую l.

б) Чему равно значение $s_M(P)$, усредненное по всем плоскостям P, проходящим через заданную точку?

в*) Чему равно значение $t_M(l)$, усредненное по всем прямым l в пространстве, проходящим через заданную точку?

П о д с к а з к а: нетрудно понять, что ответ в задачах а) — в) имеет размерность см, см^2, см^3 соответственно. Какие «геометрические величины», связанные с многоугольником или многогранником, имеют такую размерность?

А. Б. Гончаров

Задачи

М1061 — М1065, Ф1073 — Ф1077

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 декабря 1987 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 9 — 87» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1061» или «Ф1073». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи Ф1073—Ф1077 предлагались на заключительном этапе XXI Всесоюзной олимпиады по физике (Таллин, 1987).

М1061. В стране, где больше двух городов, некоторые пары городов соединены непересекающимися дорогами. Известно, что для любых трех городов A, B, C по этой сети дорог можно проехать из A в B, не заезжая в C. Докажите, что на всех дорогах можно установить одностороннее движение так, что из каждого города можно будет проехать в любой другой, двигаясь по установленным направлениям.

В. Е. Колосов

М1062. а) На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки E и D. Прямые BD и CE пересекаются в точке M, AM и BC — в точке P, AM и DE — в точке N. Докажите, что

$$\frac{PN}{NA}=2\cdot\frac{PM}{MA}.$$

б) На ребрах SA, SB и SC тетраэдра $SABC$ взяты точки D, E и F. Плоскости ABF, BCD и CAE пересекаются в точке M, прямая SM пересекает плоскости ABC и DEF в точках P и N. Докажите, что

$$\frac{PN}{NS}=3\cdot\frac{PM}{MS}.$$

Т. А. Джортменадзе, Е. Я. Глейбман

М1063. Сколько существует различных целых чисел, которые можно представить в виде разности $a-\bar{a}$, где a — n-значное натуральное число ($10^{n-1}\leqslant a<10^n$), $\bar{a}$ — число, полученное при записи цифр a в обратном порядке? Например, если $a=1917$, то $a-\bar{a}=1917-7191=-5724$. Укажите ответ для: а) $n=4$; б) $n=5$; в) любого натурального n.

Г. О. Эльстинг

М1064. Какое максимальное количество точек самопересечения может иметь замкнутая n-звенная плоская ломаная, если: а) n нечетно; б)* n четно? (Предполагается, что никакие три вершины не лежат на одной прямой и что никакие три звена не пересекаются в одной точке.)

Д. Б. Фукс

М1065*. Будем рассматривать векторы $(x;\,y)$ с целыми неотрицательными координатами, причем хотя бы одна из координат отлична от 0. Назовем такой вектор *образующим*, если $|x-y|=1$.

а) Докажите, что рассматриваемый вектор $(x;\,y)$ можно представить в виде суммы образующих (или он сам — образующий) тогда и только тогда, когда величина

$$k(x,\,y)=x+y-(x-y)^2$$

неотрицательна.

б) Докажите, что число $n(x,\,y)$ различных (с точностью до порядка) представлений вектора $(x;\,y)$ в виде суммы образующих зависит только от числа $k=k(x,\,y)$. Найдите $n(13,\,18)$.

Ф. В. Вайнштейн

Ф1073. Маленький упругий мячик отпускают с высоты $H=1$ м над полом, а на его пути закрепляют пластинку, от которой он отскакивает. Какая скорость будет у мячика в момент удара о пол? Как нужно расположить пластинку, чтобы мячик ударился о пол как можно дальше от начальной точки? Чему равно это максимальное расстояние?

А. В. Хельвас

Задачник „Кванта"

Ф1074. Папа Карло сделал для Буратино колпак из тонкой жести. Колпак имеет форму конуса высотой $H=20$ см с углом $\alpha=60°$ при вершине. Будет ли этот колпак держаться на голове у Буратино, если эта голова — гладкий шар диаметром $D=15$ см?

С. С. Кротов

Ф1075. Выполняя лабораторную работу, студент опустил в сосуд с водой кипятильник, включил его в сеть и стал каждые три минуты записывать температуру. Данные этого опыта приведены в таблице 1. Затем он охладил воду, положил в сосуд небольшой металлический образец и вновь провел измерения. Результаты этого опыта приведены в таблице 2.
Определите по этим данным теплоемкость образца. Напряжение в сети $U=35$ В, ток через кипятильник $I=0{,}2$ А, температура в комнате $t_0=20$ °С.

Л. П. Баканина

Таблица 1 t, °С	Таблица 2 t, °С
25,2	22,6
26,4	23,8
27,6	25,0
28,7	26,0
29,7	27,0
30,6	28,0
31,5	28,9
32,3	29,8
33,1	30,6

Ф1076. Для исследования солнечной батареи используется многопредельный вольтметр (он состоит из чувствительного микроамперметра и набора добавочных резисторов). Подключив его к батарее на пределе 1 В мы получаем показание $U_1=0{,}7$ В. Переключив вольтметр на предел 10 В, мы получим показание $U_2=2{,}6$ В. Что получилось бы на пределе 100 В? Известно, что при неизменном освещении солнечная батарея ведет себя как обычный источник, последовательно к которому подключен резистор большого сопротивления.

А. Р. Зильберман

Ф1077. По одной из гипотез звезды образуются из межзвездной среды (космическая пыль) путем сжатия под действием гравитационных сил. Оцените время образования звезды из гигантского сферического облака космической пыли плотностью $\rho=2\cdot10^{-20}$ г/см^3. Можно считать, что при сжатии частицы не обгоняют друг друга. Гравитационная постоянная $G=6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

В. Е. Скороваров

Problems

M1061—M1065, P1073—P1077

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than December 1st, 1987, to the follo-

M1061. In a country of more than two cities some pairs of cities are connected by non-intersecting roads. It is known that for any three cities A, B, C it is possible to travel from A to B on these roads without going through C. Prove that it is possible to choose directions of one — way traffic on all the roads so that any city may be reached from any other along the roads in the chosen directions.

V. K. Kolosov

M1062. a) Points E and D are chosen on sides AB and AC of triangle ABC. The lines BD and CE intersect at the point M, AM and BC at P, AM and DE at N. Prove that

$$\frac{PN}{NA}=2\cdot\frac{PM}{MA}.$$

b) Points D, E and F are chosen on the sides SA, SB and SC of the tetrahedron $SABC$. The planes ABF, BCD and CAE intersect at the point M, the line SM intersects planes ABC and DEF at P and N. Prove that

$$\frac{PN}{NS}=3\cdot\frac{PM}{MS}.$$

T. A. Djortmenadze, E. Ya. Gleibman

wing address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1 «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

Problems P1073—P1077 in this issue are from the All-Union Physics Olympiad (Tallin, 1987).

M1063. Find the number of distinct integers which can be represented in the form $a-\bar{a}$, where a is an n digit integer ($10^{n-1} \leqslant a < 10^n$), $\bar{a}$ is the number obtained by writing the digits of a in reverse order. For example, if $a=1917$, then $a-\bar{a}=1917-7191=-5724$. Indicate the answer for a) $n=4$; b) $n=5$; c) arbitrary n.

G. O. Elsting

M1064. What maximal number of self-intersection points can a plane polygonal line of n sides have, if a) n is odd; b)* n is even? (It is assumed that no three vertices are collinear and no three sides intersect at one point.)

D. B. Fuks

M1065*. Consider vectors $(x;\ y)$ with non-negative integer coordinates, at least one of which is non-zero. Call such a vector generating, if

$$|x-y|=1.$$

a) Prove that one of the vectors $(x;\ y)$ under consideration can be represented as the sum of generating vectors (or is itself one) if and only if the expression

$$k(x,\ y)=x+y-(x-y)^2$$

assumes a non-negative value.

b) Prove that number $n(x,\ y)$ of distinct (up to order) representations of the vector $(x;\ y)$ as a sum of generating vectors depends only on the number $k=k(x,\ y)$. Find $n(13,\ 18)$.

F. V. Vainshtein

P1073. A small elastic ball is dropped from height $H=1$m above the floor; a small flat plate is placed on its way, so the ball bounces off it. What will the ball's velocity be when it reaches the floor? How should the plate be placed in order to insure that the ball will hit the floor as far as possible from the initial point? Find this maximal distance.

A. V. Helvas

P1074. Papa Collodi made a tin cap for Pinnocchio. The cap was shaped like a hollow cone of altitude $H=20$cm and vertex angle $\alpha=60°$. Will the cap hold on Pinnocchio's head, if his head is a smooth sphere of diameter $D=15$ cm?

S. S. Krotov

P1075. Carrying out laboratory work, a student places a heating apparatus in a receptacle filled with water, turns on the heater and measures the water temperature every three minutes, obtaining the data shown on Table 1 (p. 22). Then he lets the water cool, places a small metal sample in the receptacle and repeats the measurements, with the results shown on Table 2. Find the heat capacity of the sample. The voltage on the heater is $U=35$ V, the current through it is $I=0.2$ A, the room temperature $t_0=20°$C.

L. P. Bakanina

P1076. A multirange voltmeter (consisting of a sensitive microammeter and a series of different resistors) is used to study a solar battery. Connecting the battery to the voltmeter in the 1 V range, we get a reading of $U_1=0.7$ V. In the 10 V range we get $U_2=2.6$ V. What will we get in the 100 V range? It is known that under constant illumination the solar battery behaves like an ordinary source to which a high resistance capacitor has been connected consecutively.

A. R. Zilberman

P1077. According to one of the cosmological hypotheses, stars were formed from interstellar medium (space dust) by gravitational contraction. Estimate the length of time necessary to form a star in this way from a giant space dust cloud of density $\rho=2\cdot10^{-20}$ g/cm^3. It may be assumed that particles do not overtake one another during the contraction. The gravitational constant is $G=6.67\cdot10^{-11}$ N$\cdot$m^2/kg^2.

V. E. Skorovarov

Решения задач

М1041 — М1045, Ф1053 — Ф1057

М1041. *На плоскости заданы: а) четыре, б) три вершины правильного пятиугольника. С помощью двусторонней линейки восстановите остальные его вершины. (Двусторонней линейкой можно делать то же, что и обычной линейкой без делений, а также проводить прямую, параллельную данной на расстоянии, равном ширине линейки.)*

Ключевой элемент решения — построение биссектрисы угла, показанное на рисунке 1. Мы будем также пользоваться тем, что любая сторона правильного пятиугольника видна из любой его вершины (за исключением концов этой стороны) под углом $\pi/5$. Искомый пятиугольник обозначим через $ABCDE$.

а) Пусть даны вершины A, B, C, D. Для построения E достаточно заметить, что AE — биссектриса угла, смежного с углом BAC ($\angle BAC=\pi/5$, $\angle CAE=2\pi/5$) и аналогично DE — биссектриса угла, смежного с CDB (рис. 2).

б) Очевидно, достаточно рассмотреть 2 случая: 1) заданы вершины A, B, C, 2) заданы вершины A, B, D. В случае 1 (рис. 3) строим AE — биссектрису угла, смежного с BAC, и AD — биссектрису угла EAC; вершина D находится на пересечении AD и биссектрисы угла, смежного с ACB. Аналогично строим E. В случае 2 (рис. 4) можно воспользоваться тем, что AC и DC — биссектрисы углов BAD и BDF, где DF — биссектриса угла, смежного с ADB. Это позволяет построить вершину C, а затем и E.

Некоторые читатели не обратили внимания на последнюю фразу условия и посчитали, как это принято во многих книгах о геометрических построениях, что двусторонняя линейка позволяет проводить две параллельные прямые на расстоянии, равном ее ширине, через две заданные точки A и B (как на рисунке 5). При таком понимании оказываются разрешимыми все задачи на построение, которые можно решить традиционным набором инструментов — циркулем и линейкой (но окружность следует считать построенной, если указан ее центр и отрезок, равный радиусу). Интересно выяснить, верно ли это для «двусторонней линейки» в смысле нашей задачи.

М. И. Гринчук

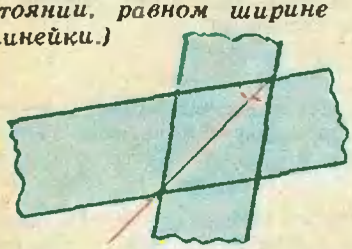


Рис. 1.

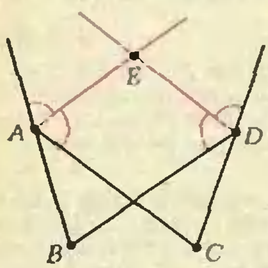


Рис. 2.

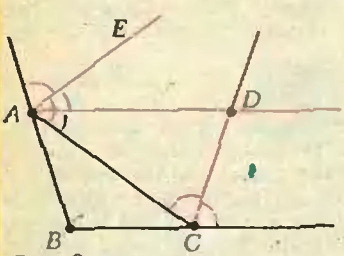


Рис. 3.

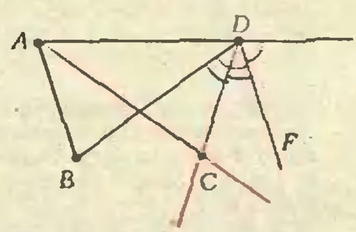


Рис. 4.

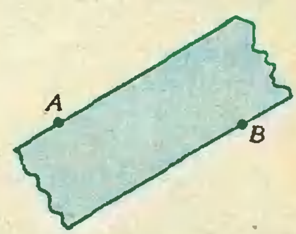
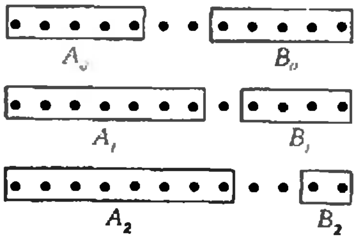


Рис. 5.

М1042. *В классе организуется турнир по перетягиванию каната. В турнире ровно по одному разу должны участвовать всевозможные команды, которые можно составить из учащихся этого класса (из одного, двух и т. д. человек, кроме команды всего класса). Докажите, что каждая*

Назовем две команды *дополнительными*, если одна из них состоит из всех учеников, не вошедших в другую. Каждый ученик класса входит только в одну из двух дополнительных команд, следовательно, он входит ровно в половину всех команд. Но половина числа всех команд равна числу всех предстоящих соревнований. Таким образом, число соревнований совпадает с числом выступлений каждого ученика, а значит, в каждом соревновании будут выступать все ученики, т. е. две дополнительные команды.

Приведем еще одно решение. Допустим, что в одном *команда будет соревноваться с командой всех остальных учеников класса.*



из соревнований должны участвовать не дополнительные команды A_0 и B_0. Пусть A_1 — команда, дополнительная к B_0, а B_1 — команда, встречающаяся с A_1, тогда $A_1 \supset A_0$, $A_1 \neq A_0$, а $B_1 \subset B_0$ и $B_1 \neq B_0$ (так как команда B_0 уже выступает с A_0; см. рисунок). Рассмотрим далее команду A_2, дополнительную к B_1 и ее соперника B_2; как и выше, $A_2 \supset A_1$, $A_2 \neq A_1$ и $B_2 \subset B_1$, $B_2 \neq B_1$. Продолжая это построение, получим бесконечную последовательность команд $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, число участников которых строго возрастает, что, конечно, невозможно.

И. Н. Сергеев

M1043. *Можно ли разбить множество всех целых чисел на три подмножества так, чтобы для любого целого n числа n, $n-50$, $n+1987$ принадлежали трем разным подмножествам?*

Ответ: нельзя. Доказательство проведем от противного. Предположим, что указанное в условии разбиение существует. Будем писать $m \sim k$, если целые числа m и k принадлежат одному и тому же подмножеству разбиения, и $m \nsim k$, если нет. Докажем, что

$$n \sim n+1937 \text{ и } n \sim n-150$$

для любого целого n; отсюда будет следовать, что

$$0 \sim 1937 \sim 2\cdot 1937 \sim \ldots \sim 50\cdot 1937 = \\ = 646\cdot 150-50 \sim 645\cdot 150-50 \sim \ldots \sim -50,$$

т. е. $0 \sim -50$, а это противоречит условию задачи.

Назовем тройку чисел *представительной*, если она содержит по одному числу от каждого подмножества разбиения. По условию тройки

$$n-50,\ n,\ n+1987;\ n-100,\ n-50,\ n+1937 \text{ и } \\ n+1937,\ n+1987,\ n+2\cdot 1987$$

— представительные при любом n ($1937=1987-50$). В частности, из второй и третьей тройки видно, что $n+1937 \nsim n-50$ и $n+1937 \nsim n+1987$, а из первой — что $n \nsim n-50$ и $n \nsim n+1987$. Отсюда следует наше первое утверждение: $n \sim n+1937$. Теперь число $n+1937$ во второй тройке можно заменить на n, т. е. тройка $n-100$, $n-50$, n — представительная. Подставляя в нее $n-50$ вместо n, получим еще одну представительную тройку $n-150$, $n-100$, $n-50$. Из сравнения этих двух троек вытекает второе утверждение: $n \sim n-150$.

С. В. Конягин

M1044. *Докажите, что из четырех чисел всегда можно выбрать два числа x и y такие, что*

$$0 \leqslant \frac{x-y}{1+xy} \leqslant 1.$$

Пусть α, β, γ, δ — арктангенсы данных чисел, расположенные по возрастанию; тогда

$$-\pi/2 < \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \delta < \pi/2 < \alpha+\pi.$$

Точки β, γ, δ разбивают отрезок $[\alpha; \alpha+\pi]$ на четыре отрезка. Длина хотя бы одного из них не превосходит $\pi/4$; в качестве x и y можно взять тангенсы его правого и левого концов. Действительно, если, например, $\beta-\alpha \leqslant \pi/4$, то, учитывая, что $\beta-\alpha \geqslant 0$, имеем $0 \leqslant \operatorname{tg}(\beta-\alpha) \leqslant 1$ и при этом

$$\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha}=\frac{x-y}{1+xy}.$$

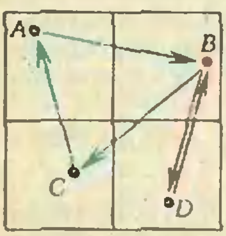
(В случае $(\alpha+\pi)-\delta \leqslant \pi/4$ надо еще воспользоваться равенством $\operatorname{tg}(\alpha+\pi-\delta)=\operatorname{tg}(\alpha-\delta)$.)

И. Н. Сергеев

M1045. *В некотором царстве, некотором государстве, территория которого*

Организуем оповещение следующим образом. Разобьем царство на 4 квадрата со стороной 1 км — квадраты 1-го ранга; каждый из этих квадратов разобьем на *имеет форму квадрата со стороной 2 км, царь решает созвать всех жителей к 7 часам вечера к себе во дворец на бал. Для этого он в полдень посылает с поручением гонца, который может передать любое указание любому жителю, который в свою очередь может передавать любое указание любому жителю и т. д. Каждый житель до поступления указания находится у себя дома (в известном месте) и может передвигаться со скоростью 3 км/ч в любом направлении. Докажите, что царь может организовать оповещение так, чтобы все жители успели прийти к началу бала.*

4 квадрата со стороной 1/2 км — квадраты 2-го ранга, эти квадраты в свою очередь на квадраты 3-го ранга (со стороной 1/4 км) и т. д., пока не дойдем до столь большого ранга n, что в каждом квадрате этого ранга будет не более одного жителя царства (жителей, попавших на общую границу нескольких квадратов нужно произвольно распределить по этим квадратам). Оповещение будет происходить поэтапно. Цель 1-го этапа — оповестить по одному жителю в каждом из (населенных) квадратов 1-го ранга, после чего гонец и все посыльные должны вернуться в исходные пункты. На 2-м этапе каждый из уже оповещенных жителей, действуя как гонец на 1-м этапе, устраивает оповещение каждого из квадратов 2-го ранга в своем квадрате 1-го ранга, на 3-м этапе оповещаются по одному жителю в каждом квадрате 3-го ранга и т. д. После n-го этапа будут оповещены все жители.



Оценим время, необходимое для 1-го этапа оповещения. Поскольку расстояние между любыми двумя точками квадрата со стороной 2 км не превосходит $2\sqrt{2}$ км, при скорости 3 км/ч его можно пройти меньше чем за 1 ч. Поэтому по схеме, показанной на рисунке, 1-й этап можно осуществить не более чем за 3 ч (гонец A оповещает жителей B и C, житель B — жителя D; если в одном из квадратов 1-го ранга жителей не окажется, время оповещения может только сократиться). Второй этап повторяет первый одновременно в четырех квадратах с вдвое меньшей стороной — он потребует не более 3/2 ч; вообще, k-й этап осуществляется за $3/2^{k-1}$ ч, а для оповещения всех жителей понадобится $3+$ $+3/2+\ldots+3/2^{n-1}<6$ ч.

Таким образом, к 6 часам вечера все жители получат приглашение на бал; еще час им потребуется, чтобы прибыть во дворец.

С. В. Конягин

Ф1053. *В тонком гладком трубопроводе скользит (в поле силы тяжести) гибкий однородный шнур (см. рисунок). Участки AB и BC трубопровода представляют собой полуокружности радиусом R, точки A, B, C лежат на одной вертикали; длина шнура $l=2\pi R$. Найти все точки шнура, в которых натяжение равно нулю в тот момент, когда нижний конец шнура находится в точке C.*

Пусть в тот момент времени, который запечатлен на рисунке, шнур имеет ускорение a. Найдем его.

За малый промежуток времени Δt шнур переместился так, что его конец, находившийся в точке C, сместился на $\Delta x=v\cdot\Delta t$, где v — значение мгновенной скорости шнура. Кинетическая энергия шнура за это время увеличилась на

$$\Delta K=\frac{m(v+\Delta v)^2}{2}-\frac{mv^2}{2}\approx mv\cdot\Delta v$$

(m — масса шнура; слагаемым $\sim(\Delta v)^2$ мы пренебрегли). Потенциальная энергия шнура изменилась на

$$\Delta\Pi=\Delta m\cdot gh=m\frac{\Delta x}{l}gh=m\frac{v}{l}gh\cdot\Delta t,$$

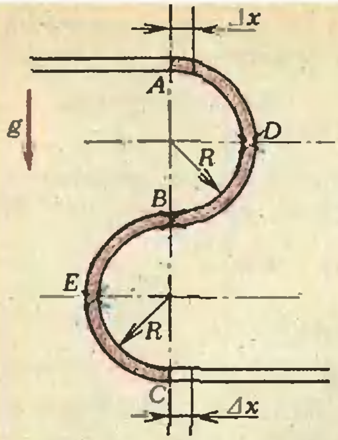
где Δm — масса участка шнура длиной Δx, который как бы «переместился» из точки A в точку C, т. е. опустился с высоты $h=4R$. Согласно закону сохранения энергии $\Delta K=\Delta\Pi$, т. е.

$$mv\cdot\Delta v=m\frac{v}{l}gh\cdot\Delta t.$$

Отсюда находим $\Delta v/\Delta t$, т. е. ускорение a шнура:

$$a=\frac{h}{l}g=\frac{4R}{2\pi R}g=\frac{2}{\pi}g.$$

Теперь мысленно разрежем шнур в какой-нибудь точке и найдем для получившихся отрезков их ускорения (тем же способом, которым мы воспользовались выше). Если ускорения отрезков окажутся одинаковыми, это



будет означать, что в данный момент времени натяжение шнура в том месте, где мы мысленно его разрезали, равно нулю. Но ускорения отрезков будут пропорциональны $h_{отр}/l_{отр}$. *Следовательно, нужно искать* такие точки на шнуре, где отношения h_1/l_1 и h_2/l_2 для двух кусков шнура, разделенных этими точками, будут одинаковыми. Из рисунка видно, что существуют три такие точки на шнуре — D, B и E.

Итак, в момент, когда нижний конец шнура *находится в точке* C, натяжение равно нулю в точках шнура D, B и E.

И. Ю. Потеряйко

Ф1054. *Два стержня одинаковой формы сделаны из материалов с разными упругими свойствами — модули Юнга материалов равны соответственно E_1 и E_2. Стержни склеены торцами и покрашены одной краской, так что получившийся образец выглядит как однородный стержень. Какой модуль Юнга «вещества» этого стержня измерит экспериментатор, не знающий, что стержень составной?*

Составной стержень представляет собой два последовательно соединенных упругих стержня с жесткостями, равными, соответственно, k_1 и k_2. Удлинение x составного стержня при его растяжении равно x_1+x_2, где x_1, x_2 — удлинения первого и второго стержней. Поскольку растягивающая сила одинакова для обоих стержней (стержни покоятся), то из закона Гука следует, что

$$k=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2},$$

где k — жесткость составного стержня.

Жесткости связаны с модулями Юнга материалов стержней:

$$k_1=E_1\frac{S}{l},\quad k_2=E_2\frac{S}{l},\quad k=E\frac{S}{2l},$$

где l — длина каждого стержня, S — площадь поперечного сечения, E — модуль Юнга «вещества» составного стержня. *Следовательно, значение E, которое получит* в измерениях экспериментатор,

$$E=k\frac{2l}{S}=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}\frac{2l}{S}=\frac{2E_1E_2}{E_1+E_2}.$$

В. А. Давыдов

Ф1055. *Электрический прибор П подключен к сети переменного тока с напряжением 220 В через конденсатор емкостью $C=0{,}5$ мкФ (рис. 1). Амперметр показывает ток $I=0{,}01$ А, показание вольтметра — $U=180$ В. Найти мощность, потребляемую от сети прибором. Считать амперметр и вольтметр идеальными.*

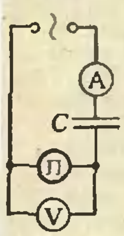


Рис. 1.

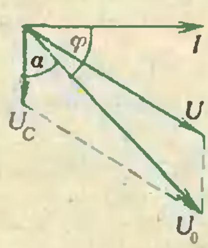


Рис. 2.

Найдем сначала действующее значение напряжения на конденсаторе:

$$U_C=IX_C=I\frac{1}{2\pi\nu C}=63{,}7\ \text{В}$$

(здесь $\nu=50$ Гц — частота колебаний переменного тока в сети). Теперь нарисуем векторную диаграмму*) токов и напряжений для данной цепи (рис. 2). Из диаграммы легко найти сдвиг фаз φ между током I и напряжением U_0:

$$\varphi=90^\circ-\arccos a=90^\circ-\arccos\frac{U_0^2+U_C^2-U^2}{2U_0U_C}\approx 46^\circ.$$

Активная мощность, потребляемая прибором П, равна активной мощности, которая выделяется во всей цепи (в конденсаторе тепло не выделяется), т. е.

$$P=U_0I\cos\varphi\approx 1{,}53\ \text{Вт}.$$

А. Р. Зильберман

*) О том, что такое векторные диаграммы и как они строятся, можно прочитать, например, в статье «Цепи переменного тока» («Квант», 1986, № 9).

Ф1056. *В схеме, изображенной на рисунке 1, ключ K_3 сначала замкнут, а ключи K_1 и K_2 разомкнуты. В некоторый момент времени замыкают ключ K_1, а спустя время $t_1=0{,}1$ с замыкают ключ K_2. Еще через время $t_2=0{,}2$ с размыкают ключ K_3. Найти: 1) максимальное напряжение на конденсаторе; 2) ток через катушку L_1 через время $t_3=1$ с после замыкания ключа K_1. Сопротивлением проводов пренебречь, диод считать идеальным; $L_1=1$ Гн, $L_2=0{,}5$ Гн, $C=10$ мкФ, $U_0=10$ В.*

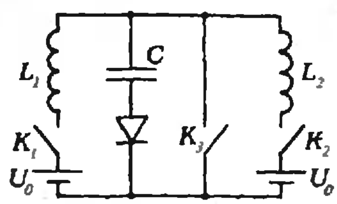


Рис. 1.

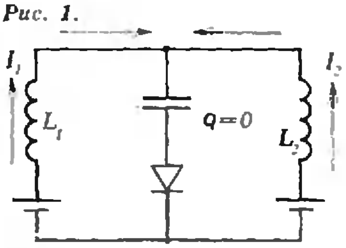


Рис. 2.

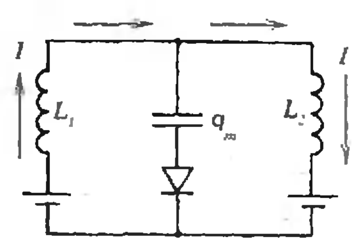


Рис. 3.

После замыкания ключа K_1 в катушке L_1 появляется ток, который с течением времени увеличивается по линейному закону

$$I_1=\frac{U_0}{L_1}t.$$

То же происходит и в катушке L_2 после замыкания ключа K_2. В момент размыкания ключа K_3 (рис. 2)

$$I_1=\frac{U_0}{L_1}(t_1+t_2)=3\ \text{А},$$

$$I_2=\frac{U_0}{L_2}t_2=4\ \text{А},$$

а заряд на конденсаторе равен нулю.

В тот момент, когда заряд конденсатора станет максимальным (он будет оставаться таким и в дальнейшем — диод не дает конденсатору разрядиться), через обе катушки будет течь один и тот же ток I, не равный нулю (рис. 3). Контур, состоящий из двух катушек и двух батареек, сверхпроводящий, а батарейки компенсируют друг друга, поэтому магнитный поток, пронизывающий контур, со временем не изменяется:

$$L_1I_1-L_2I_2=L_1I+L_2I.$$

Отсюда получаем ответ на второй вопрос задачи:

$$I=\frac{L_1I_1-L_2I_2}{L_1+L_2}=\frac{2}{3}\ \text{А}.$$

Начиная с момента размыкания ключа K_3 и до момента установления максимального заряда q_m на конденсаторе батарейки совершили работу

$$A=q_mU_0.$$

Тогда, записав закон сохранения энергии

$$\frac{L_1I_1^2}{2}+\frac{L_2I_2^2}{2}+A=\frac{(L_1+L_2)I^2}{2}+\frac{q_m^2}{2C},$$

или

$$q_m^2-2CU_0q_m-C\left(L_1I_1^2+L_2I_2^2-(L_1+L_2)I^2\right)=0,$$

находим ответ на первый вопрос:

$$q_m\approx1{,}3\cdot10^{-2}\ \text{Кл},\quad U_m=q_m/C\approx1300\ \text{В}.$$

Решение может стать более очевидным, если заметить, что две батарейки можно заменить одной (т. е. объединить положительные полюсы батареек).

А. Р. Зильберман

Ф1057. *Гантель, состоящая из двух шариков массой m каждый, закрепленных на концах легкого стержня длиной $2b$, подвешена в горизонтальном положении на двух нерастяжимых нитях длиной l, расстояние между которыми $2a$ (рис. 1). Найти период малых крутильных колебаний гантели.*

При крутильных колебаниях гантель поворачивается вокруг вертикальной оси OO_1. Выясним, как зависит потенциальная и кинетическая энергия гантели от угла поворота φ (рис. 2).

Пусть при повороте на угол φ центр тяжести гантели поднимается на высоту Δh (относительно положения равновесия). Как видно из рисунка 2, $\Delta h=l-h$, где

$$h=\sqrt{l^2-|BB_1|^2}\approx\sqrt{l^2-a^2\varphi^2}$$

(поскольку угол поворота φ мал, $|BB_1|\approx a\varphi$). Отсюда получаем:

$$l^2-h^2\approx a^2\varphi^2 \Leftrightarrow \Delta h\cdot(l+h)\approx a^2\varphi^2,$$

откуда

$$\Delta h\approx\frac{a^2\varphi^2}{l+h}\approx\frac{a^2\varphi^2}{2l}$$

(при малых φ Δh мало, и $l+h\approx2l$).

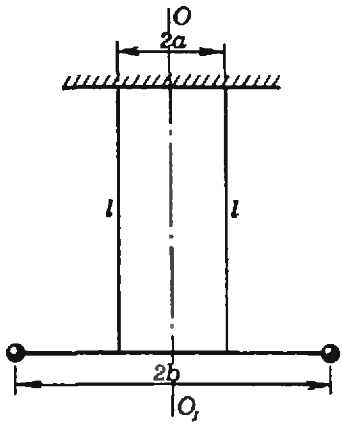


Рис. 1.

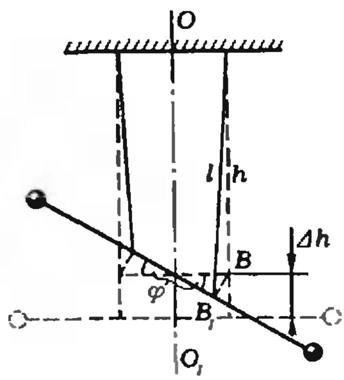


Рис. 2.

Следовательно, потенциальная энергия гантели (измеряемая по отношению к положению равновесия) зависит от угла поворота как

$$П_\varphi = 2mg\cdot\Delta h = \frac{mga^2}{l}\varphi^2. \qquad (1)$$

Вычислим теперь кинетическую энергию. При малых колебаниях можно пренебречь вертикальными составляющими скоростей шариков и считать, что векторы скоростей лежат в горизонтальной плоскости и равны по модулю $v = b\omega_\varphi = b\varphi'$ (ω_φ — угловая скорость шариков в тот момент, когда угол поворота гантели равен φ). Таким образом, кинетическая энергия зависит от угла поворота как

$$K_\varphi = 2\frac{mv^2}{2} = mb^2(\varphi')^2. \qquad (2)$$

Заметим, что формулы (1) и (2) аналогичны формулам, описывающим потенциальную и кинетическую энергию груза, колеблющегося на пружине жесткостью k:

$$П_x = \frac{1}{2}kx^2, \quad K_x = \frac{1}{2}M(x')^2,$$

где x — отклонение от положения равновесия. Пользуясь этой аналогией, можем записать:

$$П_\varphi = \frac{mga^2}{l}\varphi^2 = \frac{mga^2}{l}\left(\frac{x}{b}\right)^2 = \frac{1}{2}kx^2,$$

где $x = b\varphi$ — отклонение шарика от положения равновесия, а

$$k = \frac{2mg}{l}\frac{a^2}{b^2};$$

соответственно,

$$K = mb^2(\varphi')^2 = m(x')^2 = \frac{1}{2}M(x')^2,$$

где

$$M = 2m.$$

Таким образом, гантель будет совершать крутильные колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2mlb^2}{2mga^2}} = 2\pi\frac{b}{a}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

М. М. Цыпин

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1016—М1030, Ф1028—Ф1042, справились с задачами М1021, М1026, М1027, Ф1028, Ф1031, Ф1034, Ф1037—Ф1039, Ф1041, Ф1042. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

А. Абдрахманов (Алма-Ата) 16; *А. Аветисян* (с. Геганист АрмССР) 22; *С. Агневич* (Барановичи) 23; *А. Акимов* (Евпатория) 22, 25; *Д. Алиевский* (Свердловск) 16; *В. Андрющенко* (Винница) 22, 23, 25; *К. Аношкин* (Саратов) 24, 25; *И. Аржанцев* (Киев) 22; *Ф. Арзыкулов* (с. Балыкчи Андижанской обл.) 20; *Д. Ароцкер* (Киев) 18; *А. Афонин* (Брест) 22, 23; *А. Бабкин* (Киев) 25, 28, 29; *З. Бандик* (Белград, СФРЮ) 17—19, 22; *С. Барон* (Целиноград) 22, 23; *Ю. Безгачева* (Красноярск) 22, 24; *А. Бейянку* (СРР) 17—19, 28; *И. Белозеров* (Серпухов) 16, 18, 20, 25; *В. Бергман* (Баку) 22; *Р. Бочев* (Враца, НРБ) 22—25, 28, 29; *Ф. Бразгун* (п. Гирей Краснодарского края) 22; *В. Бугайко* (Киев) 22; *Е. Бураковский* (Киев) 23; *К. Вербицкий* (Москва) 22, 24, 28—30; *А. Винничук* (Винница) 18, 20, 22—25; *А. Винцюк* (Киев) 16, 28; *А. Витяев* (Новосибирск) 16, 18—20, 22, 28; *В. Вологодский* (Омск) 16—20, 22—24, 28; *В. Волчков* (Шахтерск) 22—24; *Д. Вольпер* (Омск) 28, 29; *Я. Воробец* (Львов) 22, 23; *М. Выборнов* (Киев) 28; *С. Герасимов* (Харьков) 28; *М. Гольдшейд* (Челябинск) 16—20, 29; *А. Гороховский* (Киев) 22, 25, 28, 29; *Н. Григорьева* (Целиноград) 22; *Р. Гринив* (Львов) 18, 22, 23, 28, 29; *З. Джабиева* (с. Махмудавар АзССР) 23; *Т. Дидук* (Целиноград) 22, 23; *Н. Дохоян* (Тбилиси) 23; *С. Дронов* (Пущино) 25, 29; *А. Дубинский* (Москва) 16; *Г. Дятлов* (Новосибирск) 28; *П. Евсельев* (Майкоп) 22; *В. Завражний* (Фрунзе) 22; *А. Залеский* (Харьков) 28; *С. Зелик* (Краматорск) 22; *Е. Зельцер* (Киев) 16, 18, 23; *И. Зефиров* (Химки Московской обл.) 16, 18, 22, 23, 25; *В. Иванов* (Тбилиси) 22; *С. Измалков* (Харьков) 22—25, 28; *И. Исрафилов* (Баку) 23; *А. Калинин* (Саратов) 22; *В. Калошин*

(Харьков) 22—25, 28, 29; *В. Кальницкий* (Калининград) 18, 20; *Л. Каминштейн* (Киев) 22; *В. Каневский* (Киев) 29; *Л. Карахалина* (Целиноград) 22, 23; *А. Каргава* (Дидиналзи) 22; *А. Карачев* (Ангарск) 22, 23; *Т. Касумов* (Баку) 20; *О. Кирнасовский* (Винница) 22—25, 29; *С. Коваценко* (Винница) 28; *О. Коврижкин* (Майкоп) 22; *А. Козачко* (Винница) 28; *В. Козуб* (Киев) 22; *И. Кокарев* (Ленинград) 29; *Г. Колесницкий* (Тбилиси) 22; *С. Комаров* (Киев) 28; *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) 22; *Д. Коростелкин* (Киев) 23; *А. Коршиков* (Мозырь) 16, 20, 22—24; *Д. Косоня* (Белорецк) 22, 23, 25, 29; *П. Кострикин* (Караганда) 16, 18, 22, 23; *В. Крепец* (Новосибирск) 22; *А. Кулик* (Киев) 25, 28; *М. Ласку* (Залау, СРР) 24; *С. Лаусмаа* (Кохтла-Ярве) 16, 18, 23; *М. Лежин* (Горький) 23; *Е. Липовая* (Целиноград) 23; *Б. Лобынцев* (Ангарск) 16; *А. Лозан* (Борислав) 22, 23; *О. Лугуев* (Махачкала) 23; *В. Лысенков* (Белорецк) 22; *А. Магащук* (Москвв) 28; *А. Макогон* (Киев) 22; *М. Малхасян* (Ереван) 24; *В. Манукян* (Ереван) 24; *А. Мельников* (Краснодар) 22, 23; *Ю. Мельников* (Киев) 25; *А. Мельцер* (Ленинград) 16, 18—20, 22—25, 28, 29; *Ю. Морозов* (Тбилиси) 22; *С. Морозов* (Заволжье) 22; *М. Мостов* (Одесса) 23; *Я. Мустафаев* (Баку) 16—20, 22—25, 29; *А. Назарян* (Тбилиси) 16, 19, 29; *С. Несторов* (Пловдив, НРБ) 16, 17; *Е. Никишина* (Целиноград) 22, 23; *О. Павлов* (Новосибирск) 22; *В. Павлунин* (Фрунзе) 22; *М. Панков* (Львов) 22, 23; *М. Пасуманский* (Ленинград) 22; *О. Пелевин* (Кострома) 17, 18, 23; *А. Пиковский* (Киев) 22—24, 29; *Д. Плешивцев* (Кокчетав) 22; *В. Полинов* (Магнитогорск) 16—18; *А. Полищук* (Москва) 28; *И. Полищук* (Москва) 22, 23; *В. Помаз* (Семеноака) 22; *А. Постников* (Москва) 22, 23, 29; *Д. Прокофьев* (п. Сертолово Ленинградской обл.) 16—19, 22—25, 29; *Ш. Рагимов* (Ульяновск) 22; *В. Рагулин* (Челябинск) 16—20, 22—24, 29; *Д. Румынин* (Красноярск) 29; *А. Сарычев* (Москва) 23; *А. Сибиряков* (Томск) 22, 23; *А. Сидоров* (Москва) 22—25, 28, 29; *Д. Симонян* (Рига) 22; *К. Сингалевич* (Ленинград) 22; *А. Синицкий* (Гатчина) 22—24, 28, 29; *Д. Синицкий* (Ленинград) 22, 24, 25; *В. Скворцов* (Черновцы) 18; *М. Скворцов* (п. Черноголовка Московской обл.) 22, 23; *В. Слитинский* (Киев) 22—25, 28, 29; *Л. Смирнова* (Киров) 22; *Л. Смирнова* (Киев) 29; *И. Соголов* (Черновцы) 20, 22, 23, 28; *И. Солтан* (Павлодар) 18, 22; *А. Строев* (Москва) 22; *А. Таджибаев* (Пскент) 22; *Ш. Талыбов* (п. Лагич АзССР) 22; *Г. Тер-Сааков* (Баку) 22, 28; *С. Тер-Сааков* (Баку) 28; *Р. Тетерук* (Киев) 25; *Д. Ткаченко* (Донецк) 23; *Ю. Томилов* (Киев) 28; *Д. Туляков* (Жданов) 16, 18—20; *Д. Усачева* (Саратов) 16; *Д. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 16—20, 22—24, 29; *Ф. Фот* (Томск) 16, 18—20, 22, 25; *Е. Хаустова* (Евпатория) 22; *М. Хачатрян* (с. Цаккар Арм. ССР) 24; *О. Христенко* (Караганда) 16, 28, 22, 23; *Д. Цуй* (Павлодар) 18; *С. Черенков* (Апрелевка) 16; *А. Шаповал* (Киев) 25; *Ф. Шейнерман* (Киев) 29; *И. Шехтман* (Киев) 22, 25; *Е. Шубин* (с. Романовка Красноярского края) 22; *К. Щербаков* (Арзамас) 29; *Я. Эфендиев* (Баку) 24; *А. Яврян* (Ереван) 22.

Физика

С. Абдулазизов (Махачкала) 32, 33; *В. Адамия* (Тула) 33, 35; *А. Антонов* (Москва) 32; *Ф. Асмандьярова* (Целиноград) 29, 32; *А. Бабкин* (Киев) 33, 35, 40; *А. Белецкий* (Канев) 33, 35, 40; *С. Белоусов* (Ленинград) 32, 33—36; *Д. Белянкин* (Москва) 35; *А. Билибин* (Боровичи) 40; *С. Бобровник* (Черновцы) 36; *С. Бобылев* (Березники) 33—36, 40; *И. Брик* (Донецк) 40; *С. Бурдаков* (Киев) 40; *М. Бурцев* (Алма-Ата) 33; *С. Бусленко* (Тула) 33, 35, 36; *С. Валюх* (Киев) 36; *И. Велиев* (Баку) 33; *К. Вербицкий* (Москва) 33, 36; *В. Вергелес* (Винница) 29; *Р. Вергелес* (Винница) 29; *А. Винцюк* (Киев) 33; *Д. Виткуп* (Киев) 40; *В. Вовк* (Барвенково) 33, 35; *П. Вольфбейн* (Киев) 32, 33, 36, 40; *В. Гениевский* (Алма-Ата) 35; *Р. Герасимов* (Ломоносов) 33, 36; *С. Гирис* (Омск) 40; *А. Гончаров* (Новосибирск) 33, 36; *М. Гончаров* (п. Черноголовка Московской обл.) 35, 40; *Г. Горбель* (Арзамас) 32, 35, 40; *Д. Горелик* (Электросталь) 35; *Ю. Гордиенко* (Винница) 32; *Г. Гороховский* (Киев) 35, 36; *П. Горьков* (п. Черноголоака Московской обл.) 36; *А. Гришин* (Кемерово) 35, 40; *Т. Гумерова* (Киев) 35; *Б. Гуревич* (Саратов) 29; *С. Гурский* (Новый Роздол) 40; *П. Гусак* (Киев) 33, 35; *С. Гусев* (Лобня) 29, 33; *С. Дворник* (п. Сарыозек Талды-Курганской обл.) 33, 35, 40; *Е. Демлер* (Новосибирск) 29, 33, 35, 36, 40; *К. Демьяненко* (Киев) 33, 35; *Д. Драчев* (Киев) 35; *С. Дронов* (Пущино) 35, 40; *П. Дудин* (Москва) 35; *Г. Дятлов* (Новосибирск) 29; *А. Езерский* (Минск) 33, 35; *В. Елагин* (Донецк) 40; *А. Елжов* (Дубна) 33; *А. Ельяшевич* (Минск) 33, 35; *С. Еремин* (Пенза) 35; *М. Етонов* (Улан-Удэ) 36; *А. Жарков* (Канев) 35; *Д. Житний* (Киев) 36; *В. Захаров* (Кемерово) 40; *Д. Звонов* (Челябинск) 33, 35; *Д. и С. Зеленские* (Семипалатинск) 33, 40; *Е. Зельцер* (Киев) 33, 40; *А. Зискинд* (Винница) 29, 33—36, 40; *К. Зуев* (Вологда) 33, 36; *В. Иванов* (Москва) 33; *И. Илиев* (Плевен, НРБ) 32; *К. Ильенко* (Харьков) 35; *А. Калашников* (Киев) 32; *В. Каменькович* (Харьков) 35; *В. Камчатный* (Киев) 33, 35, 36, 40; *С. Канатов* (Кузнецовск) 32; *А. Капустин* (Москва) 36, 40; *И. Карп* (Киев) 33; *А. Клочанов* (Алма-Ата) 33, 35, 40; *Р. Кобзев* (Канев) 33, 35, 40; *С. Комаров* (Киев) 35, 36; *Я. Коренной* (Новокузнецк) 40; *Е. Корсунский* (Харьков) 35, 36; *А. Кошеков* (Алма-Ата) 40; *П. Кравченко* (Новокузнецк) 33, 35; *С. Кравченко* (Ростов-на-Дону) 33, 35; *Ю. Кравченко* (Москва) 35, 40; *К. Краснов* (Киса) 33—36, 40; *С. Курдюков* (Москва) 32; *А. Курило* (Целиноград) 40; *А. Лебедев* (Киев) 35; *В. Лебё* (Винница) 29; *Ю. Левин* (Харьков) 35, 36; *В. Лендерман* (Киев) 33, 40; *Д. Литвинов* (Донецк) 40; *И. Лохтин* (Москва) 32; *С. Луганский* (Москва) 35; *О. Лугуев* (Махачкала) 35; *Г. Лысов-Чайников* (Донецк) 40; *А. Мазуренко* (Минск) 33, 35; *А. Майков* (Старый Оскол) 33, 40; *И. Максутов* (Тула) 35; *Р. Малков* (Саратов) 33, 36; *К. Малуреану* (Яссы, СРР) 40; *Ю. Малькин* (Целиноград) 40; *А. Мамаев* (Заволжье) 33, 40; *Н. Мамедов* (с. Аркиван АзССР) 32; *Д. Маркель* (Свердловск) 33; *А. Мацко* (Киев) 35, 36, 40; *Р. Меладзе* (Тбилиси) 35; *О. Мельников* (Красноярск) 35; *А. Мина* (Киев) 33; *Н. Михайловский* (Красноярск) 33, 35, 36, 40; *И. Мишенев* (Минск) 35; *А. Мищенко* (Киев) 29, 32; *В. Молодченко* (Одесса) 35, 36; *В. Мороз* (Ленинград) 33—36, 40; *С. Мороз* (Киев) 33, 36; *М. Мостов* (Одесса) 35, 40; *А. Муравьев* (Рига) 29; *А. Мусияченко* (Киев) 40; *В. Мытько* (Минск) 35, 40; *А. Никитин* (Тихвин) 33;

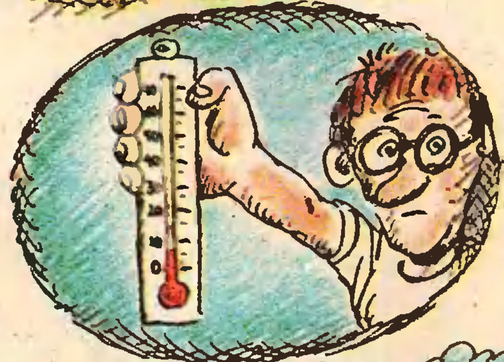
(Окончание см. на с. 44)

„Квант" для младших школьников.

Задачи

1. Решите арифметический ребус, изображенный на рисунке. (Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.)

2. Как-то раз я уронил термометр, которым обычно измеряю температуру фотореактивов (см. рисунок). Термометр не разбился, но столбик спирта «разорвался». Как починить термометр?



3. Коля купил в буфете 3 пакетика ирисок. Витя — 2 пакетика. Когда пришел в буфет Алеша, ирисок уже не было. Друзья разделили купленные ириски поровну. Выяснилось, что Алеша должен друзьям 25 копеек. Сколько стоил пакетик ирисок и сколько Алеша должен Коле, а сколько — Вите?

4. Городские часы отбивают каждый час положенное число раз, и кроме того бьют один раз в половину каждого часа. Анатолий Павлович любит читать книгу, сидя в скверике около курантов. Однажды за время, пока он читал, часы принимались бить пять раз; а всего он насчитал 11 ударов. С последним ударом часов Анатолий Павлович встал и пошел домой. В какое это было время?

5. Может ли какая-нибудь степень двойки содержать в своей записи поровну нулей, единиц, двоек, ..., девяток?

Эти задачи нам предложили ученик 3-го класса школы № 63 г. Омска *Паша Радзвиловский*, *И. И. Мазин*, *А. П. Савин*, *С. В. Дворянинов*, *Г. А. Гальперин*

Калейдоскоп „Кванта"

...теплота состоит во внутреннем движении материи...

М. В. Ломоносов. «Размышления о причине теплоты и холода»

Движение молекул ускользает от нашего непосредственного восприятия, как легкая зыбь на поверхности моря для наблюдателя, находящегося на очень далеком расстоянии.

Жан Перрен. «Атомы»

Вопросы и задачи

1. Как объяснить явление, выражаемое словами «дым тает в воздухе»?

2. Почему сливки на молоке отстаиваются быстрее в холодном помещении?

3. Отчего броуновское движение не наблюдается для чаинок в стакане?

4. Почему в горячей воде сахар растворяется скорее, чем в холодной?

5. Скорости теплового движения многих молекул при комнатной температуре близки к скорости пули. Почему же запаху духов требуется заметное время, чтобы распространиться по комнате?

6. Почему шар, выточенный из сырого дерева и покрытый лаком, сохраняется целым, в то время как точно такой же шар, не покрытый лаком, растрескивается?

Вопросы и задачи

7. На высоте нескольких сотен километров над Землей молекулы атмосферы обладают скоростями, которым соответствуют температуры в несколько тысяч градусов. Почему же не плавятся летающие на таких высотах искусственные спутники Земли?

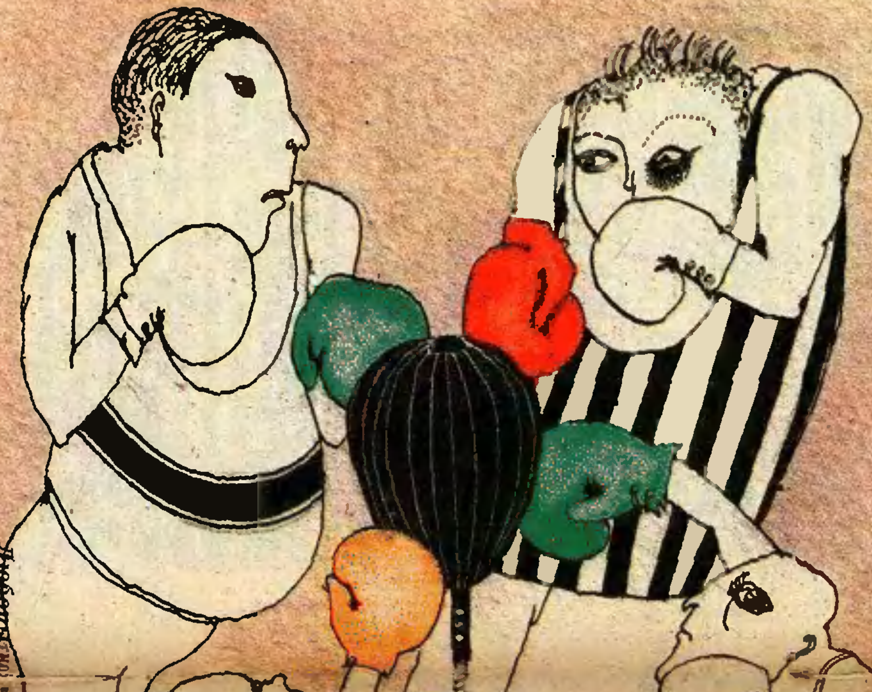
8. Почему у Луны нет атмосферы?

9. Почему разбитый стакан нельзя собрать, соединив осколки, хотя между молекулами существуют силы сцепления?

10. Отчего трудно отвинтить гайку, долгое время находящуюся в туго завинченном состоянии, несмотря на то, что болт и гайка сделаны из нержавеющего металла?

11. За счет какой энергии возможны капиллярные явления?

12. Подумайте, как изменилось бы давление в сосуде с реальным газом, если бы внезапно исчезли



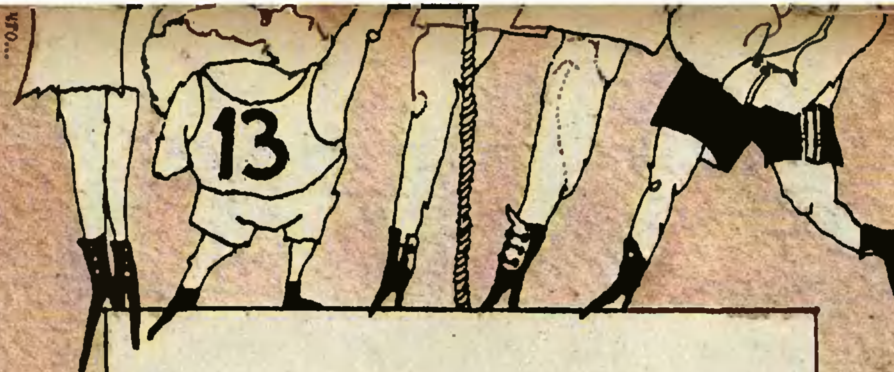
Любопытно...

...в 1845 году в Королевское общество (Академия наук Англии) была представлена работа некоего Ватерстона, в которой пока-

за на стенки сосуда можно объяснить ударами атомов. Идею о том, что упругие свойства газа можно свести к классической механике атомов, не восприняли всерьез, и работа Ватерстона была отклонена членами ученого общества. Лишь много позже ее обнаружил в архиве английский физик Рэлей и опубликовал в 1892 году в журнале «Философские сообщения Королевского общества».

То, что было сделано одним человеком и осталось незамеченным, было открыто впоследствии лишь в результате работы нескольких человек, а окончательная формула, связывающая давление газа со скоростью молекул, была написана Максвеллом в 1859 году.

...в конце прошлого столетия Людвигу Больцману приходилось столь часто отражать постоянные нападки со стороны многих противников молекулярно-кинетической теории, что одну из своих статей он заключил, перефразируя Галилея, словами «И все-таки они движутся», имея в виду, конечно, молекулы.



А так ли хорошо знаете вы,

КАК ДВИЖУТСЯ МОЛЕКУЛЫ

?

Свое начало молекулярно-кинетическая теория вещества, изучаемая в школе, берет в глубокой древности — с атомистической гипотезы. Пройдя долгий и тернистый путь, эта теория приобрела законченный вид в конце XIX — начале XX века благодаря трудам выдающихся ученых — Р. Клаузиуса, Дж. Максвелла, Л. Больцмана, А. Эйнштейна, Я. И. Френкеля. Микроскопический, или молекулярный, подход к исследованию тепловых явлений оказался чрезвычайно плодотворным и позволил нарисовать впечатляющую по своим масштабам картину процессов, происходящих в природе и в созданных человеком машинах. В этом выпуске «Калейдоскопа» предлагаем вам разобраться с некоторыми вопросами на основе представлений молекулярно-кинетической теории.

если бы внезапно исчезли силы притяжения между его молекулами?

Пробейте в стенке пустой консервной банки на небольшом расстоянии друг от друга три отверстия диаметром около 1 мм каждое. Налейте в банку воды и «сдавите» вытекающие из отверстий струйки пальцами, проведя ими по стенке банки. Что произойдет со струями? Почему?

Что читать в «Кванте» *о движении молекул (публикации последних лет)*

1. *«Простой способ определения размеров молекул» — 1983, № 9, с. 29;*
2. *«Давление идеального газа» — 1983, № 10, с. 35;*
3. *«Об агрегатных состояниях вещества» — 1984, № 9, с. 20;*
4. *«Хаотичность молекулярного движения и тепловые машины» — 1985, № 9, с. 24;*
5. *«Осмос» — 1985, № 11;*
6. *«О явлениях переноса» — 1986, № 9, с. 27;*
7. *«Ван-дер-Ваальс и его уравнение» — 1987, № 7, с. 34.*

УГАДАЙ ЧИСЛО

Вы играли в игру «Угадай число»? Даже не слышали? Это очень простая игра. Скажем, я загадываю натуральное число, меньшее 100, записываю его на бумаге (чтобы не было возможности сжульничать), а вы пытаетесь его отгадать, задавая вопросы, на которые можно отвечать лишь «да» или «нет». Потом вы загадываете число, а я пытаюсь его отгадать. Кто угадает за меньшее число вопросов — тот выиграл.

За сколько вопросов вы беретесь угадать мое число? Не знаете? Говорите, что, может быть, сразу, а может быть, понадобится сто вопросов? Я берусь угадать ваше число всего за семь вопросов. Как? А вот, например, как. Пусть вы загадали число. Я спрашиваю: «Оно меньше, чем 64?» — «Да». — «Меньше, чем 32?» — «Да». — «Меньше, чем 16?». — «Да». — «Меньше, чем 8?» «Нет». — «Меньше, чем 12?» «Нет». — «Меньше, чем 14?» «Да». — «Меньше, чем 13?» — «Нет». — «Задумано число 13».

Понятно? Я делю набор возможных чисел пополам, потом оставшуюся половину снова пополам и т. д., пока в оставшейся части не окажется всего одно число. Почему я начал с числа 64, а не с числа 50? Об этом чуть позже; можно было начинать и с числа 50. Нетрудно проверить, что для чисел, меньших 64, достаточно уже шести вопросов, а за семь вопросов можно угадать любое число, не превосходящее 128.

А вот с помощью трех таблиц *А*, *Б*, *В* с цветными цифрами я берусь угадать задуманное число, меньшее 64, всего за т р и вопроса. Первый вопрос: «Какой цвет имеет ваше число в таблице *А*?» Второй вопрос: «Какой цвет имеет это число в таблице *Б*?» Разумеется, третий вопрос — о его цвете в таблице *В*. Получив ваши от-

веты, я заглядываю в такую вот шпаргалку:

	синий	красный	черный	зеленый
1	0	1	2	3
2	0	4	8	12
3	0	16	32	48

Если вы ответили на вопросы скажем так: «Синий, зеленый, красный», я складываю три числа 0, 12, 16, стоящих на пересечении столбцов и строк, соответствующих названным цветам в соответствующих таблицах. Проверьте, что число 28 действительно имеет названные цвета в таблицах (и только оно).

А теперь откроем секрет этого фокуса. С раннего детства мы привыкли записывать числа в десятичной системе счисления. Например, последовательность цифр 1987 мы расшифровываем как $1\cdot10^3+9\cdot10^2+8\cdot10^1+7\cdot10^0$. Счет ведется десятками, десять единиц одного разряда является единицей следующего разряда. Если же за основание системы счисления взять число 4, а не 10, понадобится всего 4 цифры: 0, 1, 2 и 3. Хотя почему именно цифры? Можно, например, использовать цветные кружочки: (с) — для нуля, (к) — для 1, (ч) — для 2 и (з) — для 3. Число 28 запишется в четверичной системе счисления как $1\cdot4^2+3\cdot4^1+0\cdot4^0=130_4$ (четверка снизу числа 130 означает, что запись сделана в *четверичной* системе счисления). А в нашей цветовой записи оно запишется, как (к)(з)(с).

Если прочесть эту запись «справа налево», получится «синий — зеленый — красный». Это сочетание цветов мы и называли, когда, задумав число 28, сообщали его цвета в таблицах *А*, *Б*, *В*!

А

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63

Б

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63

В

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63

Взглянем еще раз на наши таблицы. В таблице *А* цвета чисел периодически чередуются через четыре. Таким образом, у синих чисел в четверичной записи стоит на конце число 0, у красных — 1, у черных — 2, у зеленых — 3. Цвета чисел в таблице *Б* точно таким способом определяют вторую цифру в четверичной записи числа, а в таблице *В* — третью цифру. То же самое говорит и «шпаргалка», с помощью которой мы определяли число по его цветам в таблицах. (Мы поместили числа в таблицы *А*, *Б*, *В* размером 7×9 для того, чтобы вас немного запутать: если использовать

таблицы A_1, $Б_1$, $В_1$ размером 8×8, систему можно обнаружить гораздо быстрее.) Таблицы, составленные подобным образом, но использующие 3 цвета, будут соответствовать представлению числа в *троичной* системе счисления; использующие 2 цвета — в *двоичной*. Как запишется в двоичной системе счисления число 100? Это

$$64+32+4=1\cdot 2^6+1\cdot 2^5+0\cdot 2^4+$$
$$+0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+0\cdot 2^0,$$

т. е. 1100100_2. Мы видим, что числа, меньшие ста (даже меньшие 128), записываются в двоичной системе счисления не более, чем семью знаками. Вспомните, что я брался угадать число меньшее 100, за семь вопросов! Для числа 13 получилась такая последовательность ответов: да — да — да — нет — нет — да — нет. Запишем число 13 в двоичной системе счисления и добавим впереди три нуля: 0001101_2. Какая связь между последовательностью ответов «да — нет» и полученными цифрами? Ну, конечно же, совершенно прямая: ответу «да» соответствует цифра 0, а ответу «нет» — цифра 1.

Таким образом, вместо моих вопросов «больше — меньше» можно было бы предъявить семь таблиц с синими и красными цифрами. Не знаю, как вам, а мне метод деления пополам нравится больше. Между прочим, он довольно часто используется на практике. Скажем, мне нужно найти в задачнике задачу № 1372. Я раскрываю его посредине и смотрю какой-нибудь номер задачи на этой странице. Если он больше, чем 1372, я делю пополам первую половину задачника и смотрю на номера там; а если меньше, то проделываю эту процедуру со второй половиной. Количество страниц, которые могут содержать эту задачу, каждый раз вдвое уменьшается, и я довольно быстро нахожу то, что искал. Этот метод носит название «дихотомия» от греческого «диха» — на две части — и «тома» — сечение.

Принцип дихотомии заложен и в олимпийской системе выявления чемпиона: сначала все участники разбиваются на пары, и в каждой паре определяется сильнейший, дальше побежденные — половина участников — исключаются из соревнований, а победители вновь разбиваются на пары и т. д. Пока не останется всего одна пара, во встрече которой и определяется чемпион. Эта система совершенна, если количество участников является степенью числа 2; тогда в каждом «круге соревнований» заняты все участники, а если в некотором круге число участников нечетно? Тогда одна из команд переходит в следующий круг без соревнования с другим участником. Любопытно, что если число участников на единицу больше степени двойки, то описанная ситуация будет возникать в каждом круге соревнований (например, при 9 или 17 участниках), и нужно следить, чтобы одна и та же команда не оказывалась «лишней» в каждом круге и таким образом не вышла бы в финал, не сыграв ни одной игры.

(Окончание см. на с. 50)

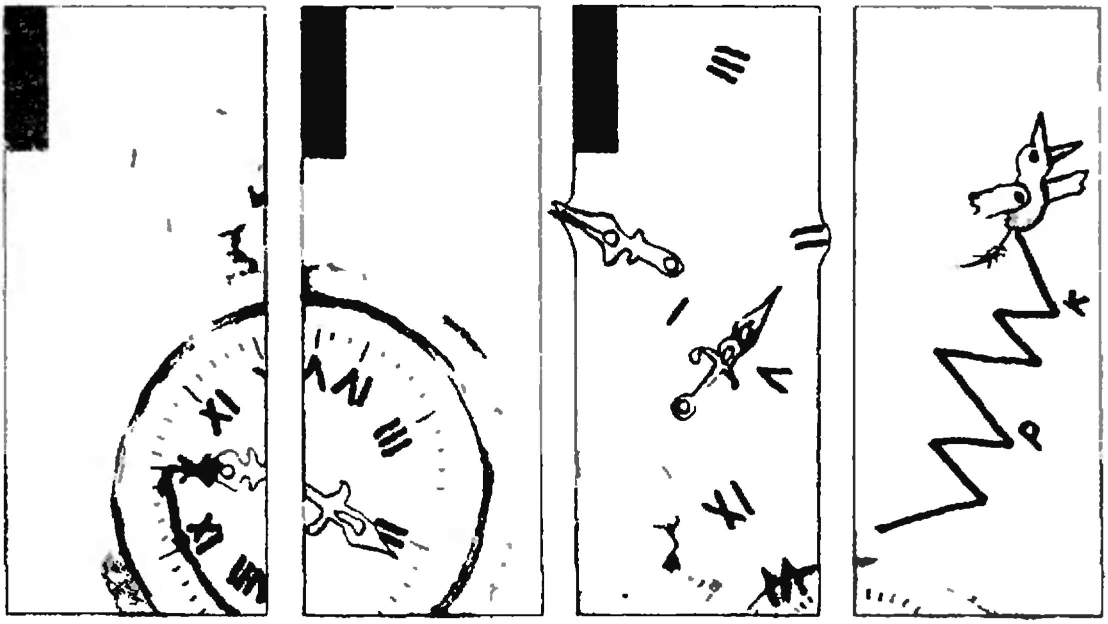
Кто с кем танцует?

Я обращаюсь ко всем, кто обучается математике, элементарной или высшей, и заинтересован в овладении ею, и говорю: «Конечно, будем учиться доказывать, но будем также учиться догадываться».

Д. Пойа

Математике должно учить в школе ещё с тою целью, чтобы познания, здесь приобретаемые, были достаточны для обыкновенных потребностей в жизни.

Н. И. Лобачевский



Школа в „Кванте"

Физика 8, 9, 10

Публикуемые ниже заметки «Легко ли описывать движение?» и «Вокруг одной задачи» предназначены восьмиклассникам, заметка «Давление газа в сосуде» — девятиклассникам, «Гармонические колебания и равновесие» — десятиклассникам.

Легко ли описывать движение?

Многие понятия кинематики — раздела механики, посвященного изучению движений тел без выяснения их причин,— кажутся нам очень простыми, даже элементарными. Однако потребовались века, чтобы наука выработала эффективные методы описания движений. Остановимся несколько подробнее на истории формирования представлений о двух кинематических величинах — о скорости и ускорении.

Движение любого тела связано с изменением его положения в пространстве с течением времени. Эта привычная для нас мысль не столь уж однозначна. Действительно, что, например, следует принять за независимую переменную при описании движения — путь или время? Ученые начала XVII века не были единодушны в ответе на этот вопрос. И если это различие во взглядах не приводило к серьезным расхождениям при исследовании равномерного прямолинейного движения, то в случае неравномерного движения оно оказывалось весьма существенным. Попробуйте, скажем, установить закон движения, предположив пропорциональность скорости пройденному пути ($v \sim s$), и вы убедитесь, что это гораздо более трудная задача, чем описание равноускоренного движения, при котором скорость пропорциональна времени ($v \sim t$).

Заслуга систематического рассмотрения задач кинематики прямолинейного равноускоренного движения принадлежит Г. Галилею (1564—1642). Экспериментально изучив свободное падение тел и их движение по наклонной плоскости с малым трением, Галилей сформулировал закон равноускоренного движеиия, который звучал так: «Если тело, выйдя из состояния покоя, падает равномерно-ускоренно, то расстояния, проходимые им за определенные промежутки времени, относятся между собою как квадраты времен».

Мысль Галилея о том, что свободное падение происходит равноускоренно, воспринималась современниками с трудом. Один из героев книги Галилея «Беседы и математические доказательства» приводит против нее такое, представляющееся ему убедительным, возражение: «Если тяжелое падающее тело выходит из состояния покоя таким образом, что скорость его увеличивается пропорционально времени, истекшему от начала движения, то отсюда следует, что тело должно двигаться с любой степенью скорости или любой большой степенью медленности, выходя из состояния покоя... — явление, которое весьма трудно себе представить, когда наши чувства показывают, что тяжелое падающее тело сразу приобретает большую скорость». Кажущееся противоречие «показаний чувств» и теории Галилей снимает с помощью остроумного опыта (подумайте — какого).

Галилею же принадлежит и идея о представлении сложного движения как результата сложения относительно простых движений. «Пробным камнем» для ее проверки послужила задача о движении тела, брошенного под углом к горизонту, которая (будучи важной в военном отношении) издавна привлекала внимание ученых. Еще Леонардо да Винчи (1452—1519) в целом правильно представлял вид траектории такого тела (рис. 1). Однако и во времена Галилея в трактатах по военному делу можно было встретить ошибочное описание траектории снаряда как совокупности двух отрезков прямых и части окружности (рис. 2). Доказательство Галилеем теоремы о том, что «при сложном движении, слагающемся из равномерного горизонтального и естественно-ускоренного движений, бросаемое тело описывает полупараболу», представляло крупное научное достижение.

Следует отметить, что Галилей в своих рассуждениях никогда не пользовался понятием «скорость» и соответствующим выражением $v=s/t$. Все его теоремы посвящены анализу отношений однородных (т. е. имеющих одинаковую размерность) величин. (Вспомним, например, формулировку утверждения, касающегося свободного падения тела.) Такой способ изложения определяется традицией, берущей начало еще в эпохе Античности. Интересно, что и И. Ньютон (1643—1727) в своих знаменитых «Началах» не пользовался выражением $v=s/t$. Первым, кто осмелился ввести скорость таким образом, был Л. Эйлер (1707—1783). В сочинении «Теория движения твердых тел» (1765 г.) он дал ей такое определение: «При равномерном движении отношение путей к промежуткам времени, в течение которых они прохо-

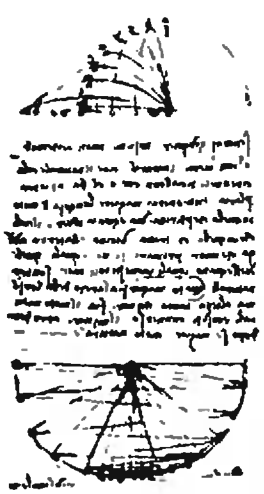


Рис. 1. Семейство баллистических траекторий, каким его представлял Леонардо да Винчи (рисунок из его записных книжек). Общий вид этих траекторий изображен верно, однако зависимость дальности полета от угла бросания показана неправильно.

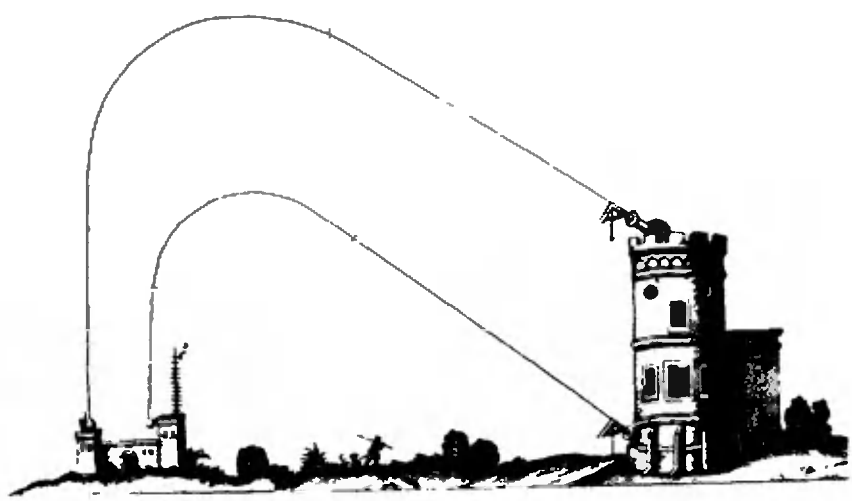


Рис. 2. Схема из военного трактата XVII века. Вид изображенной здесь траектории снаряда гораздо сильнее отличается от реальной, чем на рисунке Леонардо да Винчи.

дятся, называется быстротой или скоростью. ⟨...⟩ Итак, если при равномерном движении за время, равное t, проходится путь, равный s, то скорость равна s/t. Если скорость обозначить буквой v, то $v=s/t$». Как видите, даже обозначения переменных, использованные Эйлером, сохранились до наших дней.

Но, может быть, мы преувеличиваем значимость шага, сделанного Эйлером? Скорее всего нет. Насколько необычным для XVIII века был его подход к определению физической величины, свидетельствуют пояснения, которые Эйлер счел необходимым сделать далее: «Здесь может, пожалуй, возникнуть сомнение по поводу того, каким образом можно делить путь на время, так как ведь это — величины разнородные, и, следовательно, невозможно указать, сколько раз промежуток времени, например, в 10 минут, содержится в пути длиной, например, в 10 футов. ⟨...⟩ Если для измерения путей мы изберем определенную длину в качестве единицы и точно так же для времени изберем в качестве единицы определенный промежуток времени и если мы будем постоянно пользоваться этой мерой, то все пути и времена выразятся в отвлеченных числах, и тогда для деления первых на вторые не будет никаких препятствий». Вот какие простые вещи приходилось разъяснять в фундаментальных сочинениях по механике в середине XVIII века.

Но и Эйлера нельзя считать в полной мере автором современного определения скорости — он не пользовался понятием скорости как вектора, а отдельно определял модуль скорости и ее направление. Представление о скорости как о направленном отрезке вошло в физику примерно через сто лет после публикации сочинения Эйлера, когда в математике были разработаны основы векторного исчисления.

После рассказа о длинной и сложной истории понятия скорости уже не столь удивительным представляется тот факт, что понятие ускорения вошло в науку еще позже. Впервые физическую величину «ускорение» ввел в своих лекциях по механике французский математик и инженер Ж. Понселе (1788—1867) лишь в 1841 году. Это не значит, однако, что в сочинениях авторов XVIII и даже XVII веков не встречается термин «ускорение». Им пользовались, но подразумевали не физическую величину, а процесс изменения скорости. (Отметим попутно, что в физике можно найти и другие примеры такого смешанного словоупотребления — вспомним хотя бы термины «перемещение», «давление», «сопротивление».) Правда, Эйлер уже рассматривал вторую производную пути по времени, имеющую с современной точки зрения смысл касательного ускорения, но он интерпретировал ее по-другому. Эйлер писал, что эта производная «выражает собою тот отрезочек пути, на который тельце перемещается сверх того расстояния, которое пройдено им в силу бывшего у него раньше движения».

Широкое использование ускорения в работах по механике началось лишь после выхода в свет (1851 г.) сочинения «Элементы механики» француза А. Резаля, ученика Понселе.

Итак, история основных понятий кинематики показывает, что выработка научного языка для описания движения потребовала преодоления многих трудностей принципиального характера. И то, что мы теперь с легкостью пользуемся этим языком, лишний раз подчеркивает заслуги ученых прошлого.

С. Р. Филонович

Вокруг одной задачи

На одном из занятий кружка по решению задач наш учитель предложил такую задачу:

За пятую секунду равнозамедленного движения тело проходит 5 см и останавливается. Какой путь тело прошло за третью секунду?

Никто из нас не смог к ней подступиться. Тогда учитель сказал: «Сегодняшнее занятие кружка мы посвятим решению этой задачи, хотя она решается... устно. Для этого лишь нужно знать... Впрочем, решите сначала другую задачу». Вот ее условие:

За последние полсекунды свободно падающее тело проходит путь, равный 30 м. Найдите скорость тела в момент приземления.

Эту задачу мы решили легко:

$$s=v_0t+\frac{gt^2}{2},\ v_t=v_0+gt,$$

откуда

$$v_t=\frac{s+gt^2/2}{t}=$$
$$=\frac{30\ \text{м}+(10\ \text{м/с}^2)(0{,}5\ \text{с})^2/2}{0{,}5\ \text{с}}=62{,}5\ \text{м/с},$$

но связи с предыдущей задачей не обнаружили. Однако как только учитель записал конечную формулу иначе:

$$s=v_tt-\frac{gt^2}{2},$$

мы сразу же увидели обратимость движения. (Это как в кино, когда снятый эпизод прокручивают в обратном порядке.)

Теперь нашу задачу можно сформулировать так:

За первую секунду равноускоренного движения без начальной скорости тело проходит 5 см. Найдите путь за третью секунду.

Мы быстро нашли несколько путей решения. Учитель же остановился на одном из них, в котором было получено выражение для пути, пройденного за любую секунду:

$$s_n=(2n-1)\frac{a\tau^2}{2},$$

где $\tau=1$ с, n — номер секунды. Обратив наше внимание на множитель $(2n-1)$ — рекуррентную формулу нечетного числа, учитель записал:

$$s_1:s_2:\ldots:s_n=1:3:\ldots:(2n-1).$$

И тогда всем стало ясно, что нашу задачу действительно можно было решить устно:

$$s_3=5s_1=25\ \text{см}.$$

В. А. Бодик

Давление газа в сосуде

Зависит ли давление газа на стенку сосуда от материала стенки и ее температуры? Попробуем ответить на этот вопрос.

При выводе основного уравнения молекулярно-кинетической теории идеального газа в учебнике «Физика 9» (§ 7) предполагается, что стенка абсолютно гладкая и столкновения молекул со стенкой происходят по закону абсолютно упругого удара. Другими словами, кинетическая энергия молекулы при ударе не меняется, и угол падения молекулы равен углу отражения. Является ли это предположение оправданным и необходимым?

Коротко можно сказать так: предположение оправдано, но не необходимо.

На первый взгляд кажется, что считать стенку абсолютно гладкой ни в коем случае нельзя — стенка сама состоит из молекул и, значит, гладкой быть не может. Из-за этого угол падения не может при любом соударении равняться углу отражения. Кроме того, молекулы стенки совершают хаотические колебания около положений равновесия (участвуют в беспорядочном тепловом движении). Поэтому при столкновении с какой-либо молекулой стенки молекула газа может передать часть энергии стенке или, наоборот, увеличить свою кинетическую энергию за счет стенки.

Тем не менее предположение об абсолютно упругом характере соударения молекулы газа со стенкой оправдано. Дело в том, что при вычислении давления в конечном счете важны средние значения соответствующих величин. При условии теплового равновесия между газом и стенкой сосуда кинетическая энергия молекул газа в среднем остается неизменной, т. е. соударения со стенкой не меняют среднюю энергию молекул газа. Если бы это было не так, то тепловое равновесие самопроизвольно нарушалось бы. А это невозможно согласно второму закону термодинамики. Также не может быть преимущественного отражения молекул в каком-либо определенном направлении — иначе сосуд с газом начал бы двигаться, что противоречит закону сохранения импульса. Значит, среднее число молекул, падающих на стенку под некоторым углом, равно среднему числу молекул, отлетающих от стенки под таким же углом. Предположение о зеркальном отражении от стенки каждой отдельной молекулы соответствует этому условию.

Таким образом, считая соударения молекул газа со стенкой упругими, мы получаем для среднего давления такой же результат, как и без этого предположения. Значит, давление газа не зависит от качества обработки стенки (ее гладкости). Однако предположение об абсолютно упругом характере удара сильно упрощает вычисление давления газа, и поэтому оно оправдано.

А зависит ли давление газа на стенку от ее температуры? На первый взгляд — должно зависеть. Если, например, нет теплового равновесия, то молекулы от холодной стенки должны отскакивать с меньшей энергией, чем от горячей.

Однако, даже если одну стенку поддерживать холодной с помощью холодильной установки, то давление на нее все равно не может быть меньше, чем давление на противоположную горячую стенку. Ведь тогда сосуд начал бы двигаться ускоренно без внешних сил, а это противоречит законам механики: освободив закрепленный сосуд со стенками различной температуры, мы не вызовем его смещения. Дело здесь в том, что при данном неравновесном состоянии газа в сосуде концентрация молекул у холодной стенки больше, чем у горячей. Уменьшение кинетической энергии молекул у холодной стенки компенсируется увеличением концентрации молекул и наоборот. В результате давление на холодную и горячую стенки оказывается одним и тем же.

Рассмотрим еще один вариант опыта. Охладим очень быстро одну из стенок. В первый момент давление на нее уменьшится, и сосуд немного сдвинется с места; затем давления выравняются, и сосуд остановится*). Но при этом движении центр масс системы останется на месте из-за того, что плотность газа у холодной стенки станет чуть больше, чем у горячей.

Следует отметить, что на самом деле давление не остается строго фиксированной величиной. Оно испытывает флуктуации, и поэтому сосуд слегка «дрожит» на месте. Но амплитуда дрожания сосуда крайне мала.

Итак, окончательно мы пришли к выводу, что давление газа на стенки в сосуде не зависит ни от качества обработки стенок, ни от их температуры.

Г. Я. Мякишев

*) Остановка сосуда произойдет из-за того, что молекулы газа при ударе передают больший импульс той стенке, которая движется им навстречу.

Гармонические колебания и равновесие

Что мы изучаем, рассматривая колебания грузика, подвешенного на нитке или на пружинке? Два конкретных движения или нечто большее?

Оказывается, за «элементарными» движениями грузика стоит огромный, поистине неисчерпаемый мир колебаний. В природе колеблется все. Колеблются электроны внутри атома, атомы внутри молекулы, молекулы внутри кристалла. Колеблются дома, мосты и любые другие механические конструкции. Колеблется количество щук и карасей в водоемах, волков и зайцев в лесах. И так можно было бы продолжать до бесконечности.

Каждое колебание характеризуется своей частотой ω (или периодом $T=2\pi/\omega$), и частота эта является важнейшей характеристикой любой колеблющейся системы. Так, например, частоты колебаний атомов в кристаллах определяют физические свойства кристаллов: их теплоемкость, теплопроводность, электрическое сопротивление и т. д. Частоты колебаний механических конструкций связаны с их прочностью и устойчивостью по отношению ко всякого рода механическим воздействиям. Некоторые электрические системы (генераторы, антенны и т. п.), в сущности, специально создаются для того, чтобы получить колебания определенных, нужных нам частот. Понятно поэтому, как важно уметь находить частоты колебаний, возникающих в различных системах. Но прежде чем рассказать, как это делается, обсудим, почему вообще колебания так распространены в природе.

Мы привыкли к тому, что мир вокруг нас довольно устойчив. Дома и мосты не разрушаются, корабли не переворачиваются, волки и зайцы устойчиво сосуществуют друг с другом. Кажется вполне очевидным, что тело, лежащее на дне ямы, самопроизвольно никогда не «выползет» из нее, в то время как лежащее на вершине горки тело вполне может взять да и скатиться вниз. Так вот, в определенном смысле и дом, и мост, и корабль на воде чрезвычайно похожи на лежащее на две ямы тело. Похожи тем, что все они находятся в положении устойчивого равновесия.

Оказывается, устойчивость равновесия и колебания тесно связаны друг с другом. Всякий раз когда в физике заходит речь о поведении или свойствах системы вблизи ее положения равновесия, возникает задача о колебаниях, или, как ее часто называют, задача об осцилляторе (от латинского oscillo — качаюсь). К осциллятору сводится большое число проблем современной физической науки.

Устойчивое равновесие характеризуется тем, что потенциальная энергия системы в этом положении минимальна. Именно благодаря этому и возникают колебания. Действительно, отклонив систему из положения равновесия, мы тем самым увеличили ее потенциальную энергию. В системе при этом возникают силы, стремящиеся вернуть ее обратно (уменьшить потенциальную энергию). Если предоставить такую систему самой себе, то она начнет «разгоняться», «скатываясь» к своему положению равновесия (как шарик в ямке). Избыточная потенциальная энергия переходит в энергию, связанную с движением, то есть в кинетическую. При прохождении положения равновесия «скорость» системы максимальна (вся потенциальная энергия перешла в кинетическую), и система проскакивает это положение. В дальнейшем «скорость» начинает уменьшаться, кинетическая энергия вновь переходит в потенциальную и т. д. Возникают колебания.

Мы не случайно слова «разгоняться» и «скорость» поставили в кавычки. Дело в том, что величина $v=\Delta x/\Delta t$ (Δx — «смещение» тела из положения равновесия), которая играет роль скорости, иногда совпадает с настоящей скоростью, а иногда нет (чуть ниже мы поясним это на примерах). Но независимо от этого кинетическая энергия всегда пропорциональна квадрату этой величины, т. е.

$$W_k \sim \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2.$$

Так как для движущегося тела $W_k=mv^2/2$, то и в более общем случае кинетическую энергию принято записывать в виде

$$W_k = \frac{m}{2}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2.$$

Величина m здесь часто совпадает с массой, но в принципе может и отличаться от нее.

Потенциальная энергия произвольной системы вблизи положения устойчивого равновесия может быть записана в виде

$$W_p = \frac{k}{2}\Delta x^2.$$

Множитель $1/2$ здесь введен просто для удобства (для симметрии с выражением $W_k=mv^2/2$), коэффициент k в каждом конкретном случае свой, а величина Δx, как уже говорилось,— малое «смещение» тела из положения равновесия.

При описании любого физического явления энергия играет, пожалуй, самую фундаментальную роль. Хотя бы потому, что закон ее сохранения сильно ограничивает возможные типы движения. Чрезвычайно важна она и в нашем случае. Сделаем некоторое общее утверждение:

Если полная энергия системы, равная сумме потенциальной и кинетической энергий, в произвольный момент времени записывается в виде

$$W = \frac{k\Delta x^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2,$$

то это означает, во-первых, что система колеблется и, во-вторых, что квадрат частоты колебаний равен отношению коэффициентов, определяющих потенциальную и кинетическую энергии, т. е. $\omega^2=k/m$.

Вот мы и сформулировали основное правило нахождения частот колеба-

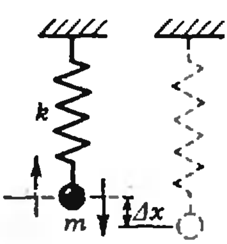


Рис. 1.

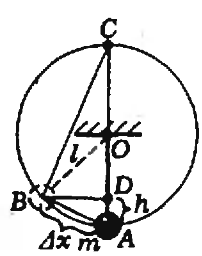


Рис. 2.

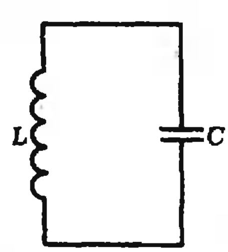


Рис. 3.

ний. Проиллюстрируем сказанное на примерах.

Пример первый (совсем простой) — тело на пружинке (рис. 1). Роль потенциальной энергии в этом случае играет энергия упругой деформации (k — жесткость пружины). Из общего утверждения получаем

$$W=\frac{k}{2}\Delta x^2+\frac{m}{2}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2,\ \omega^2=\frac{k}{m},$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Аналогично находятся частоты любых упругих колебаний: молекул в кристалле, Останкинской телебашни или моста через залив в Сан-Франциско и т. п.

Пример второй (чуть сложнее) — математический маятник (рис. 2). При записи потенциальной энергии материальной точки в поле тяготения надо учесть, что в выражении $W_p=mgh$ величина $h=\Delta x^2/2l$ (это следует из подобия треугольников ABD и ABC на рисунке 2). Тогда из общего утверждения следует:

$$W=\frac{mg}{2l}\Delta x^2+\frac{m}{2}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2,\ \omega^2=\frac{g}{l},$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Аналогично находятся частоты колебаний шарика в ямке, корабля на воде и т. д.

Пример третий (электрический) — колебательный контур (рис. 3). В равновесии ни заряда на конденсаторе (C), ни тока через катушку (L) нет. При отклонении от равновесия на конденсаторе появляется заряд ΔQ, а через катушку течет ток $I=\Delta Q/\Delta t$. Роль потенциальной энергии играет энергия заряженного конденсатора: $W_p=(\Delta Q)^2/(2C)$ (ведь именно она связана с взаимным расположением зарядов). Роль кинетической энергии берет на себя энергия, запасенная в катушке: $W_k=LI^2/2=(L/2)(\Delta Q/\Delta t)^2$ (она связана с током, т. е. с движением зарядов; $I=\Delta Q/\Delta t$ играет роль скорости). Итак,

$$W=\frac{1}{2C}(\Delta Q)^2+\frac{L}{2}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)^2,$$

$$\omega^2=\frac{1}{LC},\ T=2\pi\sqrt{LC}.$$

Определение частот колебаний по виду энергии оказывается удобным и в любом другом случае.

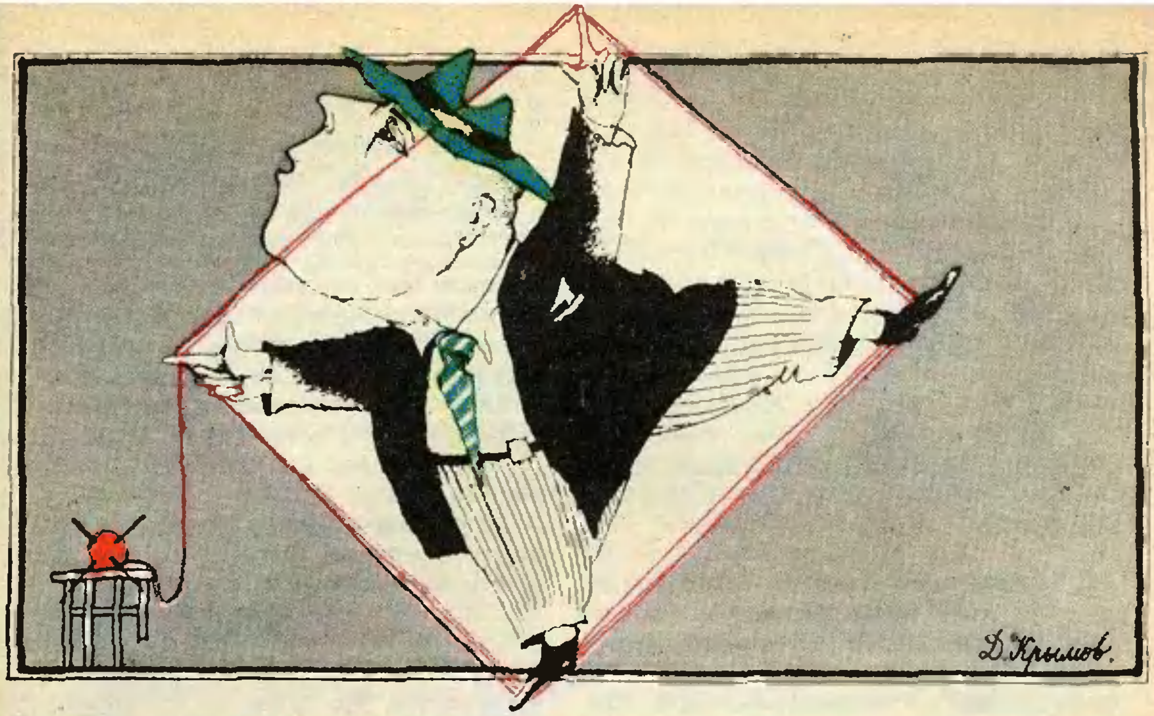
В заключение хочется сказать, что колебания не есть один из типов движения в ряду многих других, а представляют собой фундаментальное явление, элемент того таинственного «алфавита», с помощью которого природа создает все, что нас окружает.

Е. Е. Городецкий

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 29)

К. Николаев (п. Черноголовка Московской обл.) 33—36; *А. Новик* (Мозырь) 33; *Д. Ноготков* (Алма-Ата) 29, 33, 40; *А. Носенко* (Коммунарск) 33, 35; *С. Ночевный* (Запорожье) 33, 35; *Е. Однорогова* (Винница) 29; *К. Ольхин* (Краснодар) 35; *О. Паруш* (Одинцово) 36, 40; *Д. Пастухов* (Москва) 29, 40; *Л. Петько* (Минск) 33, 35, 36, 40; *А. Платонов* (п. Черноголовка Московской обл.) 35; *А. Подтележников* (Харьков) 36; *О. Покрамович* (д. Скоки Брестской обл.) 33; *П. Полынкин* (Тула) 33, 35; *А. Португалов* (Киев) 40; *О. Радичкин* (Наро-Фоминск) 33, 35; *А. Раев* (Бор-Ундур, МНР) 33, 35; *Н. Рахманов* (Ленкорань) 33, 35; *Т. Рашник* (Киев) 33, 35; *М. Рзаев* (Баку) 36; *Д. Румынин* (Новосибирск) 33, 40; *Л. Руда* (Киев) 40; *А. Рыбак* (Новосибирск) 40; *Р. Сагайдак* (с. Матусов Черкасской обл.) 33—36; *В. Саенко* (Улан-Удэ) 33; *С. Сазонов* (Климовск) 33, 35; *Ю. Самохвалов* (Омск) 35; *В. Сафонов* (Челябинск) 32; *А. Седлов* (Целиноград) 40; *Е. Семенюта* (п. Ирша Красноярского кр.) 40; *А. Сибиряков* (Томск) 35, 36; *Н. Сидоров* (Киев) 33, 35, 36, 40; *С. Сильвестров* (Киев) 33, 35, 36; *Д. Симонян* (Рига) 35; *В. Синенко* (Канев) 33, 35; *Д. Синицкий* (Ленинград) 36; *В. Скворцов* (Черкассы) 29; *В. Смирнов* (Тихвин) 33; *М. Соколов* (Одинцово) 35; *А. Ставицкий* (Баку) 29, 32, 33, 35; *П. Старков* (п. Черноголовка Московской обл.) 40; *А. Стародубов* (Алма-Ата) 29; *В. Старцев* (Алма-Ата) 32; *А. Степура* (Ивано-Франковск) 29, 32, 33, 35, 36; *А. Субботин* (Алма-Ата) 34; *В. Терещенко* (Киев) 33; *Д. Тильга* (Алма-Ата) 40; *О. Толмачев* (Киев) 40; *А. Толстых* (Днепродзержинск) 29; *Ф. Тринчук* (Москва) 33, 35; *В. Тур* (Киев) 33, 35; *В. Тягнирядно* (Минск) 32; *Г. Фейгин* (Тула) 33, 35; *В. Фирсов* (Москва) 33, 40; *Н. Фатаув* (Белорецк) 33; *Ф. Фот* (Томск) 36; *П. Фурсиков* (Куйбышев) 33, 35; *Ю. Харченко* (Москва) 40; *П. Хиль* (п. Овидиополь Одесской обл.) 40; *Д. Хосид* (Алма-Ата) 40; *С. Храпов* (Коломна) 29; *О. Цодиков* (Артемовск) 33; *И. Чайка* (Кузнецовск) 33; *О. Чанов* (Брест) 29; *М. Чекушина* (Алма-Ата) 35; *Е. Чернышев* (Ташкент) 35; *И. Шагалов* (Долгопрудный) 35; *А. Шигабутдинов* (Димитровград) 35; *С. Штовба* (Винница) 29, 33, 35; *У. Юсупов* (Шават) 40; *И. Ясников* (Тольятти) 35, 40.



Математический кружок

Соображения непрерывности

С. Л. ТАБАЧНИКОВ

В большинстве задач из школьного учебника математики требуется решить уравнение, найти значение какой-либо величины, построить фигуру с заданными свойствами и т. д. Эта статья посвящена задачам другого сорта — в них требуется только доказать, что искомый корень, число, фигура и т. д. существует. Метод решения, которым мы будем пользоваться,— это *соображения непрерывности*.

Задачи о плоских фигурах

Начнем с такой задачи. *На плоскости расположена некоторая фигура. Докажите, что существует вертикальная прямая, делящая ее площадь пополам.*

Возьмем вертикальную прямую, расположенную слева от данной фигуры (рис. 1, *а*), и начнем перемещать ее направо. В некоторый момент прямая коснется границы фигуры (рис. 1, *б*), затем будет скользить по фигуре (рис. 1, *в*—*д*) и наконец окажется справа от фигуры (рис. 1, *ж*). Как меняется при таком движении площадь той части фигуры, которая лежит слева от прямой (синяя часть на рисунке 1)? Эта площадь непрерывно изменяется от нуля (рис. 1, *а*) до площади всей фигуры S (рис. 1, *ж*). Следовательно, в некоторый момент эта площадь равнялась половине площади всей фигуры. В этот момент вертикальная прямая и делила площадь фигуры пополам.

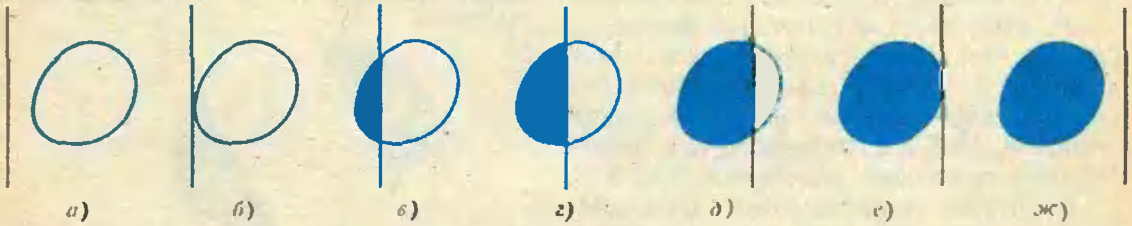


Рис. 1.

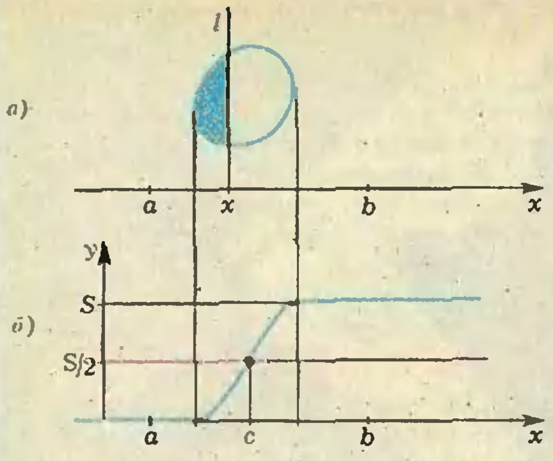


Рис. 2.

Обсудим это решение. Во-первых, оно не дает возможности построить нужную прямую, а только доказывает ее с у щ е с т в о в а н и е. Впрочем, ожидать рецепта построения такой прямой и не приходится — ведь данная фигура совершенно произвольная.

Во-вторых, наше решение показывает, что существует прямая п р о и з в о л ь н о г о направления, делящая площадь фигуры пополам. Более того, из решения также следует, что прямая, проходящая в данном направлении и делящая площадь фигуры пополам, определяется е д и н с т в е н н ы м образом. Этим мы в дальнейшем будем пользоваться.

Взглянем на наше решение несколько с другой точки зрения. Выберем на плоскости горизонтальную числовую ось (рис. 2, *а*). Положение произвольной вертикальной прямой l характеризуется числом x (точкой, в которой прямая l пересекает ось). Рассмотрим площадь части фигуры, лежащей слева от прямой l, как функцию $f(x)$. График этой непрерывной функции показан на рисунке 2, *б*). Найти прямую, делящую площадь фигуры пополам, это значит найти на числовой оси такую точку c, для которой $f(c)=S/2$.

Рассмотрим на рисунке 2, *б*) горизонтальную прямую $y=S/2$. Левый конец графика функции $f(x)$ лежит ниже этой прямой, а его правый конец — выше, так как $f(a)=0<S/2$, а $f(b)=S>S/2$. Следовательно, существует точка пересечения горизонтальной прямой $y=S/2$ с графиком $f(x)$. В этой точке и выполнено равенство $f(c)=S/2$.

Свойство непрерывных функций, которым мы пользовались при решении, называется т е о р е м о й о п р о м е ж у т о ч н о м з н а ч е н и и:

> *между двумя своими значениями непрерывная функция принимает все промежуточные значения.*

Более формально: если $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a; b]$ и c — некоторое число, заключенное между $f(a)$ и $f(b)$, то на отрезке $[a; b]$ найдется такая точка x_0, что $f(x_0)=c$.

Например, в нашей задаче функция $f(x)$ принимает значение $S/2$, заключенное между $f(a)=0$ и $f(b)=S$.

Теорема о промежуточном значении почти очевидна. И как многие очевидные утверждения, доказать ее не совсем просто. Для доказательства пришлось бы углубиться в определение непрерывной функции и действительного числа. Это увело бы нас слишком далеко от темы нашей статьи, поэтому пусть теорема о промежуточном значении останется для нас просто очевидной. И еще одно: мы не доказывали, что площадь части фигуры, лежащей слева от прямой, непрерывно зависит от положения этой прямой (т. е., что $f(x)$ — непрерывная функция). Это тоже почти очевидно; и в других задачах этой статьи мы не будем отдельно доказывать непрерывность возникающих при решении функций.

З а д а ч и

1. а) Дана выпуклая фигура*) и точка вне ее. Докажите, что существует прямая, проходящая через эту точку и делящая площадь фигуры пополам.

б) Во что превратится предыдущая задача, если точка будет стремиться в бесконечность?

в) Решите п. а в случае, когда точка лежит в н у т р и фигуры.

г) Верно ли, что в пп. а и в существует единственная прямая?

2. а) Даны две выпуклые фигуры (может быть, пересекающиеся). Докажите, что существует прямая, делящая площадь каждой из фигур пополам.

б) Во что превратится эта задача, если одна из фигур стянется в точку?

---

*) Выпуклая фигура вместе с любыми двумя точками содержит целиком и соединяющий их отрезок. Например, круг — выпуклая фигура, а окружность — нет.

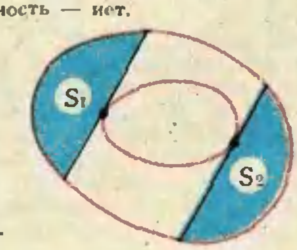


Рис. 3.

в) Пусть каждая из фигур в п. а — параллелограмм. Постройте требуемую прямую.

3. Дана выпуклая фигура. Докажите, что существует прямая, одновременно делящая пополам ее площадь и периметр.

4. а) Даны две выпуклые фигуры, одна из которых лежит внутри другой. Докажите, что найдутся две параллельные хорды внешней фигуры, касающиеся внутренней фигуры и такие, что $S_1=S_2$ (рис. 3).

б) Во что превратится эта задача, если внутренняя фигура стягивается в точку?

5. Докажите, что у выпуклой фигуры найдутся равные и параллельные хорды, делящие ее площадь на три равные части.

6. Докажите, что вокруг выпуклой фигуры можно описать квадрат.

Почему табурет квадратный?

Представьте себе, что пол на кухне у вас не очень ровный (так обычно и бывает, особенно если он покрыт линолеумом). Поэтому квадратный табурет стоит на полу только тремя ножками, а четвертая ножка висит в воздухе. Можно ли так передвинуть табурет, чтобы он стоял на полу всеми четырьмя ножками или может случиться, что, как его ни двигай, табурет все равно будет качаться? Мы, конечно, предполагаем, что, когда табурет твердо стоит на четырех ножках, его поверхность может быть несколько наклонена по отношению к полу.

(Прежде чем приступить к математическому решению этой задачи, проведите эксперимент у себя на кухне. После того как этот эксперимент даст положительный ответ на наш вопрос, перейдите к математическому решению задачи.)

Будем считать, что поверхность пола, хотя и не является плоской, все же отличается от плоской не слишком сильно. Это предположение позволяет исключить полы «патологической» формы — такой, например, как пол пещеры, покрытый сталагмитами, т. е. известковыми сосульками, растущими вверх.

Итак, пусть у табурета ножки A, B и C стоят на полу, а четвертая ножка D висит в воздухе (рис. 4, *а*). Не отрывая ножек A и C от пола, повернем табурет относительно прямой AC таким образом, чтобы ножки B и D находились в воздухе на равном расстоянии от пола (рис. 4, *б*; расстояние до пола отсчитывается вдоль направления ножек). В таком положении (две ножки табурета стоят на полу, а две другие находятся от пола на равном расстоянии) табурет можно передвигать.

Представим себе, что пол сделан из пластилина и ножки табурета могут свободно пройти сквозь него. Опустим табурет в направлении его ножек так, чтобы ножки B и D оказались на полу, а ножки A и C — ниже поверхности пола и на равном расстоянии от нее (рис. 4, *в*).

Начнем поворачивать табурет вокруг его центра против часовой стрелки из положения 4, *б*, не отрывая ножек A и C от пола и сохраняя равное расстояние от ножек B и D до пола. После поворота на 90° ножки A и C займут положение ножек D и B на рисунке 4, *в*, а ножки B и D — соответственно положения ножек A и C на рисунке 4, *в*. Во время движения табурета расстояние от ножек B и D до пола меняется непрерывно. В начальный момент — рисунок 4, *б* — это расстояние положительно, так как ножки выше поверхности пола, а в конечный момент, изображенный на рисунке 4, *в*,— отрицательно, так как ножки ниже поверхности пола. Следовательно, был момент, когда это расстояние равнялось нулю. *В этот момент табурет и стоял на всех четырех ножках.*

Наше решение имеет не только теоретическую, но и практическую ценность — поворачивая табурет на 90° вокруг его центра, можно найти устойчивое положение. Проверьте это экспериментально. И еще одно замечание. Наше решение основано на том, что ножки табурета расположены в вершинах квадрата. Если бы они были расположены в вершинах прямо-

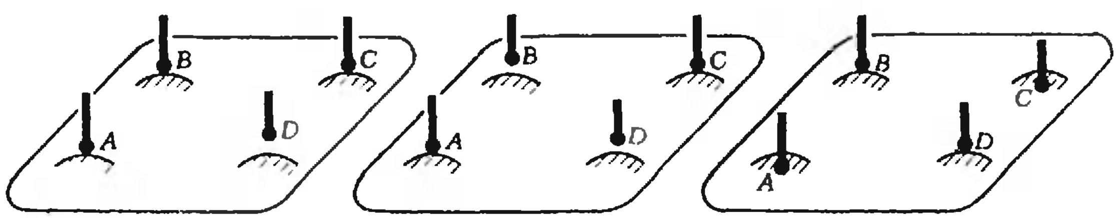


Рис. 4.

угольника или другого четырехугольника, наше рассуждение бы не прошло. Автору не известно, верно ли утверждение задачи для четырехугольников, отличных от квадрата (во всяком случае, ясно, что четырехугольник должен быть вписанным в окружность). Если кто-нибудь из читателей сможет разобраться в этом вопросе, обязательно сообщите нам.

Задачи

7. Учитель попросил доказать, что выпуклую фигуру можно разделить парой взаимно перпендикулярных прямых на четыре равновеликие части. Один ученик предложил такое решение. «В любом направлении можно провести единственную прямую l, делящую площадь фигуры пополам (рис. 5, *а*). Каждую из получившихся половин фигуры можно разделить на две равновеликие части прямыми, перпендикулярными l (рис. 5, *б*). Начнем изменять направление прямой l, сохраняя вид чертежа. После изменения направления на 180° точки A и B поменяются местами. Значит, в некоторый момент они совпадали. В этот момент рисунок 5, *б* превратится в рисунок 5, *в* и мы получим нужную пару перпендикулярных прямых, делящих площадь фигуры на четыре равные части».

а) Найдите ошибку в этом решении.

б) Придумайте правильное решение задачи.

8. Докажите, что в центрально-симметричную выпуклую фигуру можно вписать квадрат.

(На самом деле квадрат можно вписать в любую фигуру. Но для доказательства этой теоремы выдающегося советского математика Л. Г. Шнирельмана (1905—1938) одних соображений непрерывности уже не достаточно.)

9. Даны две выпуклые фигуры, одна из которых лежит внутри другой. Докажите, что:

а) найдутся две параллельные хорды внешней фигуры, касающиеся внутренней фигуры и имеющие одинаковую длину (рис. 6, *а*);

б) найдется точка X внешней фигуры, из которой можно провести две равные касательные хорды к внутренней фигуре (рис. 6, *б*).

Указание. Среди хорд внешней фигуры, касающихся внутренней, есть хорда наибольшей длины. Проведите из ее концов касательные к внутренней фигуре.

10. Даны три выпуклые фигуры, вложенные друг в друга (рис. 7). Докажите, что найдется точка X внешней фигуры, из которой можно провести касательные хорды к внутренней фигуре так, чтобы отрезки, заключенные в средней фигуре, были бы равны.

О корнях многочленов и хордах графиков функций

Вы, конечно, знаете, что квадратный трехчлен может не иметь корней — таков, например, многочлен x^2+x+1. А как обстоит дело с кубическими многочленами? Сейчас мы докажем, что

> *всякий кубический многочлен имеет хотя бы один корень*

Рассмотрим сначала кубический многочлен со старшим коэффициентом 1:

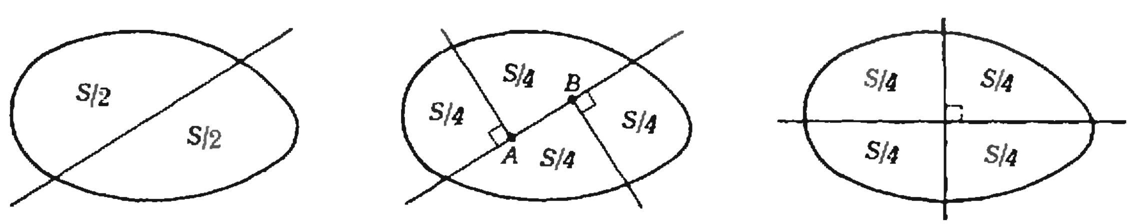
$$f(x)=x^3+bx^2+cx+d$$

Запишем его в таком виде: $f(x)=x^3(1+b/x+c/x^2+d/x^3)$. Если величина $|x|$ очень велика, то слагаемые b/x, c/x^2 и d/x^3 становятся очень малыми. Поэтому число, стоящее в скобке, близко к 1 и, во всяком случае, положительно. Следовательно, знак $f(x)$ при больших $|x|$ определяется знаком числа x^3. Тем самым $f(x)<0$ при больших по абсолютной величине отрицательных x и $f(x)>0$ при больших положительных x.

Кубический многочлен, как и всякий многочлен, — непрерывная функция. Поэтому можно применить теорему о промежуточном значении. Из нее следует, что найдется такое x, что $f(x)=0$. Следовательно, кубический многочлен имеет корень.

Случай общего кубического многочлена $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ сводится к уже разобранному: достаточно разделить $f(x)$ на a.

Наше доказательство хорошо иллюстрирует силу и слабость соображений непрерывности. Мы почти «даром» получили неочевидное утверждение о существовании корня, однако осталось неясным, как найти корень для конкретного многочлена (формулы для корней кубического многочлена существуют, но ... это уже совсем другой сюжет, и мы его не будем касаться).



а) б) в)

Рис. 5.

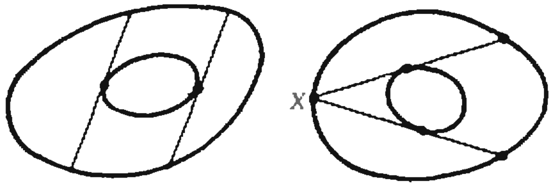


Рис. 6. а) б)

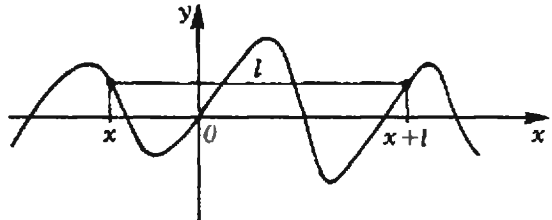


Рис. 8.

Другой пример. *Пусть $f(x)$ непрерывная периодическая функция на прямой с периодом T. Докажите, что ее график имеет горизонтальную хорду длины $T/2$.*

Существование горизонтальной хорды длины l равносильно равенству $f(x)=f(x+l)$ (рис. 8). Следовательно, нам нужно доказать, что найдется такое x, что $f(x+T/2)=f(x)$. Иными словами, нужно доказать, что функция $g(x)=f(x+T/2)-f(x)$ имеет корень, т. е. $g(x)=0$ для некоторого x.

Возьмем произвольное число a. Если $g(a)=0$, то все доказано; поэтому предположим, что $g(a)\neq 0$. Для определенности будем считать, что $g(a)<0$. Пусть $b=a+T/2$. Найдем значение $g(b)$:

$$g(b)=g(a+T/2)=f(a+T/2+T/2)-$$
$$-f(a+T/2)=f(a+T)-f(a+T/2)=$$
$$=f(a)-f(a+T/2)=-g(a).$$

Итак, $g(b)>0$.

Функция $g(x)$ непрерывна, как разность непрерывных функций. Поэтому можно воспользоваться теоремой о промежуточном значении. Из этой теоремы следует, что между числами a и b найдется такое x, что $g(x)=0$.

Утверждение о горизонтальных хордах графика периодической функции можно значительно усилить: *график такой функции имеет горизонтальную хорду произвольной длины.*

А вот с графиками непрерывных функций на отрезке дело обстоит иначе. Пусть на отрезке длины T задана непрерывная функция, значения которой в концах отрезка совпадают.

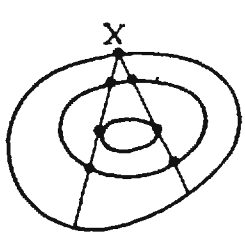


Рис. 7

Тогда если число l имеет вид T/n для некоторого натурального n, то график функции обязательно имеет горизонтальную хорду длиной l; если же l не такого вида, то существует непрерывная функция с одинаковыми значениями на концах отрезка, график которой не имеет горизонтальных хорд длиной l. (Подробный рассказ об этом вы найдете в статье И. М. Яглома «О хордах непрерывных кривых», «Квант», 1977, № 4.)

Задачи

11. Докажите, что многочлен нечетной степени имеет корень.

12. Вчера в полночь было холоднее, чем в полночь позавчера и сегодня. Докажите, что найдется один и тот же момент времени вчера и сегодня, когда температура была одинаковой.

13. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на некотором отрезке, и все ее значения принадлежат этому же отрезку. Докажите, что найдется такое x, что $f(x)=x$.

14. Многочлен $f(x)=ax^2+bx+c$ таков, что уравнение $f(x)=x$ не имеет решений. Докажите, что уравнение $f(f(x))=x$ тоже не имеет решений.

15. Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая функция на прямой с периодом T. Докажите, что ее график имеет горизонтальные хорды длины l, где:

а) $l=T/3$; б) $l=T/n$; в) $l=T\cdot p/q$;
г) l — любое.

16. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке длины T, значения которой в концах отрезка совпадают. Докажите, что ее график имеет горизонтальную хорду длины l, где:

а) $l=T/2$; б) $l=T/3$; в) $l=T/n$; г) постройте функцию, график которой не имеет горизонтальных хорд длины $2T/3$.

17. *Средним значением функции* $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ называется величина $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$. Докажите, что если среднее значение непрерывной функции на некотором отрезке равно нулю, то она принимает на этом отрезке нулевое значение.

18. Рассмотрим функцию вида $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\ldots+a_n\sin nx+b_1\cos x+b_2\cos 2x+\ldots+b_k\cos kx$, где $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k$ — некоторые коэффициенты. Докажите, что уравнение $f(x)=0$ имеет корень.

Заключение

Мы разобрали несколько задач, в решении которых основную роль играли соображения непрерывности. В каждой из задач интересующая нас величина зависела от одного параметра — например, площадь части фигуры, лежащей по одну сторону от прямой, зависела от угла наклона этой прямой. Соображения непрерывности можно распространить и на случай, когда параметров больше одного. Подробный рассказ об этом не входит в наши планы; ограничимся формулировкой нескольких теорем.

1. В пространстве произвольным образом расположены три тела. Существует такая плоскость, которая делит объем каждого из тел пополам. Это утверждение известно, как «теорема о сэндвиче с ветчиной» (первое тело — это кусок хлеба, второе — слой масла, а третье — ломоть ветчины).

2. На земле найдутся две такие диаметрально противоположные точки, в которых совпадают температура и давление.

3. Вокруг выпуклого тела можно описать куб. (Эта теорема обобщает на случай пространства утверждение задачи 6).

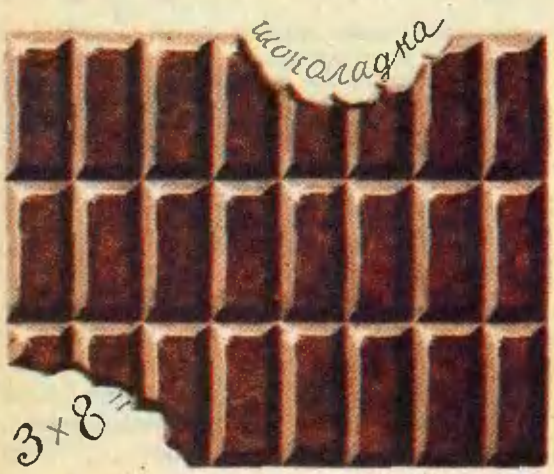
4. Представьте себе шар, покрытый волосами. Можно ли его «причесать» таким образом, чтобы каждый волосок касался поверхности шара, и направления близко расположенных волосков отличались не очень сильно? Оказывается, нельзя — хотя бы один волосок останется перпендикулярным к поверхности шара. Это утверждение известно как «теорема о еже» или «теорема о причесывании шара».

5 (для тех, кто знает комплексные числа). Мы доказали, что многочлен нечетной степени обязательно имеет действительный корень. А как обстоит дело с комплексными корнями? Оказывается, любой многочлен (отличный от постоянного) имеет хотя бы один комплексный корень. Это утверждение настолько важно, что оно называется основной теоремой алгебры. Один из подходов к его доказательству тоже основан на соображениях непрерывности.

Угадай число

(Начало см. на с. 34)

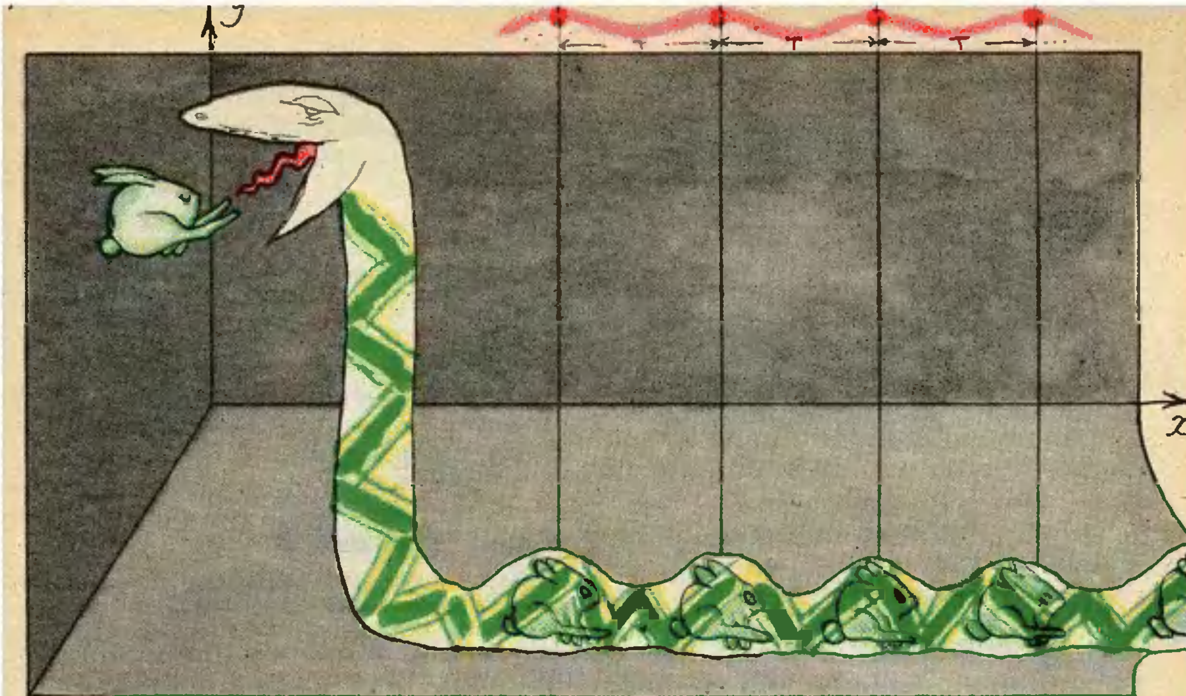
Попробуйте ответить на следующий вопрос: «В соревнованиях на кубок по волейболу участвует 133 команды, соревнования проводятся по олимпийской системе; сколько будет проведено игр для определения победителя?»



Сначала кажется, что нужно очень долго считать, чтобы получить ответ, а решение оказывается чрезвычайно простым. Достаточно заметить, что в каждой игре выбывает ровно одна команда, а нужно, чтобы осталась одна; значит, чтобы выбыло 132 команды, нужно провести 132 игры.

Эта же идея присутствует в решении еще одной популярной задачи. *Шоколадка состоит из 3×8 долек. Сколько нужно сделать разломов по линиям, чтобы полностью разломать ее на дольки?* Сначала решающий встает в тупик: ведь ломать-то можно совсем по-разному! Но давайте четко сформулируем задачу. Есть один кусок шоколада, нужно получить 24 куска, и при каждом разламывании количество кусков увеличивается ровно на один. Значит, ломать придется 23 раза, причем безразлично, в каком порядке это делать.

Публикация подготовлена *А. П. Савиным* по материалам *В. А. Далингера* и *Ф. Н. Фазылова*



Практикум абитуриента

Функции периодические и непериодические

Доктор физико-математических наук
Г. В. ДОРОФЕЕВ,
доктор физико-математических наук
Н. Х. РОЗОВ

Любой человек без труда приведет много примеров процессов, повторяющихся через равные промежутки времени,— мы сталкиваемся с ними буквально на каждом шагу и в природе, и в технике, и просто в быту. Для теоретического описания, изучения таких процессов служит понятие *периодической функции*, относящееся к важнейшим понятиям математики.

С этим понятием старшеклассники уже знакомы по учебнику*), и мы не будем повторять то, что там сказано. Однако все же сделаем два замечания.

Вот что написано (и специально выделено шрифтом) в учебнике:

Определение. *Функция f называется периодической с периодом $T\neq 0$, если для любого x из области определения f значения этой функции в точках x и $x+T$ равны:*

$$f(x+T)=f(x). \qquad (1)$$

Однако полное определение периодической функции этим не исчерпывается. Школьники часто забывают, что в учебнике сделано специальное предположение об области определения $D(f)$ периодической функции f с периодом $T\neq 0$: если число x принадлежит области определения $D(f)$, то и числа $x-T$ и $x+T$ также принадлежат ей.

Указанное требование к области определения является обязательной частью определения периодической функции. Если это требование не учитывать, получится, что, например, функция $y=\sin(\sqrt{x})^2$; (определенная при $x\geqslant 0$) окажется периодической с периодом 2π (она удовлетворяет условию (1)), хотя в математике она таковой не считается. При отсутствии требования к области определения становится неверной и теорема о том, что если число T — период функции f, то и число $-T$ является периодом этой функции.

*) См. «Алгебра и начала анализа 9-10».— М.: Просвещение, 1986, § 3, п. 5.

Более тонкое замечание. Приведенное выше определение не дает прямого ответа на вопрос: что такое периодическая функция? Конечно, на основании этого определения каждый догадается, что естественно назвать функцию периодической, если она является периодической с некоторым периодом $T \neq 0$. Но, говоря строго, понятие периодической функции пока не определено.

Чтобы избежать обсуждения перечисленных моментов и исключить возможные недоразумения, остановимся на следующем определении.

Функция f называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что при любом x из области определения $D(f)$ числа $x-T$ и $x+T$ также принадлежат $D(f)$ и выполняется равенство (1).

Фигурирующее в определении число $T \neq 0$ называется *периодом* функции f. Если функция является периодической, т. е. имеет *хотя бы один* период T, то она имеет *бесконечно много* периодов — ее периодом будет и всякое число nT, где n — *отличное от нуля* целое число. Если же T — *наименьший положительный период* функции, то ее периодами являются все числа вида nT, где $n \neq 0$ — целое, и только они.

Когда заходит речь о конкретных примерах периодических функций, школьники обычно ограничиваются основными тригонометрическими функциям: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$. Между тем запас периодических функций, встречающихся в школьном курсе, гораздо шире. Вспомним известное утверждение: *если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют один и тот же период T, то их сумма, разность, произведение и частное также имеют период T.* С помощью этого утверждения легко получать примеры периодических функций.

Большое число периодических функций можно строить по формуле $g(f(x))$, если в качестве f взять *периодическую* функцию, а в качестве g — произвольную. Вот несколько примеров:

$$\sin^3 2x;\ \sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}};\ \log_2\cos(x-4);$$

$$\arcsin(\cos x);\ \ln\sqrt{4-\operatorname{tg}^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}.$$

Пример периодической функции (внешне никак не связанной с тригонометрическими функциями) — это $y=\{x\}$, т. е. *дробная часть числа x.* Периодической является и всякая постоянная функция (ее периодом служит любое ненулевое число).

* * *

Обычно школьники относительно легко справляются с задачами, в которых требуется *доказать периодичность* некоторой данной функции. В таких случаях, как правило, сначала угадывается период, после чего доказательство сводится к простой проверке определения. Но значительные трудности возникают тогда, когда нужно *доказать непериодичность* конкретной функции.

Дело в том, что определение периодической функции имеет довольно сложную логическую структуру. Поэтому уже саму формулировку определения того факта, что *функция $f(x)$ не является периодической* (то есть *является непериодической*), привести не так просто. Часто складывается парадоксальная ситуация: школьнику совершенно ясно, что предложенная ему функция — непериодическая (и это действительно так!), но доказать это он не может.

Для доказательства непериодичности данной функции часто вовсе и не нужно точно формулировать общее определение непериодической функции. Гораздо более простым и удобным оказывается иной, обходной путь. Именно: мы можем воспользоваться следующим логически очевидным утверждением: *если все периодические функции обладают некоторым свойством, а данная функция этим свойством не обладает, то она не является периодической.*

Чтобы «обходной» путь был эффективным, надо иметь набор общих свойств периодических функций. Мы укажем сейчас несколько таких свойств и продемонстрируем, как их используют для доказательства непериодичности функций.

Свойство I. *Если точка x_0 принадлежит области определения периодической функции с периодом T, то ее области определения принадлежат и все точки x_0+nT, $n \in \mathbf{Z}$.*

Аналогично, *если точка x_0* не *принадлежит области определения периодической функции с периодом T, то ее области определения* не *принадлежат и все точки x_0+nT, $n \in \mathbf{Z}$.*

Свойство I немедленно получается из определения периодической функции.

Следствие. *Область определения периодической функции содержит сколь угодно большие по модулю положительные и отрицательные числа.*

Отсюда, например, вытекает, что логарифмическая функция $y=\ln x$ не является периодической — ее область определения $(0; +\infty)$ не содержит отрицательных чисел. Непериодична и функция $y=\arcsin x$, поскольку в ее области определения $[-1; 1]$ нет чисел, больших 1.

Пример 1. *Доказать непериодичность функций*

$$f_1(x)=\sqrt{x(1-x)};\ f_2(x)=\frac{x-1}{x^2-3x-5}.$$

Область определения функции $f_1(x)$ — отрезок $[0; 1]$. Значит, эта функция не является периодической в силу следствия из свойства I.

Так как квадратный трехчлен x^2-3x-5 имеет два корня, функция $f_2(x)$ не определена лишь в двух точках. Поэтому она не является периодической — по «второй части» свойства I.

Свойство II. *Периодическая функция принимает каждое свое значение при бесконечном числе значений аргумента, среди которых есть сколь угодно большие по модулю положительные и отрицательные числа.*

Это свойство легко вытекает из равенства

$$f(x+nT)=f(x),\ n\in\mathbf{Z}, \qquad (2)$$

справедливого для периодической функции $f(x)$ с периодом T.

Следствие. *Периодическая функция не может быть возрастающей или убывающей на всей своей области определения.*

Отсюда, например, следует, что функция, возрастающая (или убывающая) на всей числовой прямой, не может быть периодической — в частности, непериодической является показательная функция $y=a^x$ (где $a\neq 1$).

Свойство II удобно использовать в переформулированном виде: *если $f(x)$ — периодическая функция, то при любом $a\in\mathbf{R}$ уравнение $f(x)=a$, либо не имеет корней, либо имеет бесконечно много корней.*

Пример 2. *Доказать непериодичность функций*

$f_1(x)=2x-\cos x;\ f_2(x)=e^{-x^2};$

$f_3(x)=\dfrac{3x^2-x+2}{x^2+x+1};$

$f_4(x)=\cos x+\cos(x\sqrt{2})+\cos(x\sqrt{3}).$

Вычислим производную функции $f_1(x)$:

$$f_1'(x)=2+\sin x.$$

Так как $f_1'(x)>0$ при любом $x\in\mathbf{R}$, то функция $f_1(x)$ — возрастающая на всей числовой прямой. Поэтому она не является периодической.

Функция $f_2(x)$ принимает наибольшее значение 1 в единственной точке $x=0$ (убедитесь в этом). Следовательно, эта функция непериодическая.

Уравнение

$$\frac{3x^2-x+2}{x^2+x+1}=a,$$

где $a\in\mathbf{R}$, не может иметь, как нетрудно видеть, более двух корней. Поэтому функция $f_3(x)$ каждое свое значение принимает не более чем в двух точках и, значит, не является периодической.

Функция $f_4(x)$ при $x=0$ принимает значение 3. Решим уравнение

$$\cos x+\cos(x\sqrt{2})+\cos(x\sqrt{3})=3.$$

Так как $\cos t\leqslant 1$, это уравнение равносильно системе

$$\cos x=1,\ \cos(x\sqrt{2})=1,\ \cos(x\sqrt{3})=1.$$

Первое уравнение системы удовлетворяется при $x=2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$, а второе — при $x=\sqrt{2}n\pi$ $(n\in\mathbf{Z})$; эти серии значений x имеют лишь единственную общую точку $x=0$, которая, очевидно, удовлетворяет и третьему уравнению системы. Таким образом, уравнение $\cos x+\cos(x\sqrt{2})+\cos(x\sqrt{3})=3$ имеет только один корень, а потому функция $f_4(x)$ является непериодической.

Свойство III. *Если $f(x)$ — периодическая функция, то уравнение (1), где T — неизвестное, а x — параметр, имеет по крайней мере одно ненулевое решение $T=T_0$ для всех значений параметра $x\in D(f)$.*

Свойство III представляет собой переформулировку определения: ведь если функция $f(x)$ — периодическая, то существует такое число $T_0\neq 0$, что $f(x+T_0)=f(x)$ для любого $x\in D(f)$, а это и означает, что число $T_0\neq 0$ является корнем уравнения (1) *при всяком значении параметра $x\in D(f)$.*

В соответствии со свойством III для доказательства непериодичности функции $f(x)$ достаточно найти такие два значения аргумента $x=a$ и $x=b$, что уравнения относительно T

$$f(a+T)=f(a),\ f(b+T)=f(b)$$

не имеют *общего ненулевого* решения.

Пример 3. *Выяснить, является ли периодической функция*

$$f(x)=|x|+\sin x.$$

Допустим, что $f(x)$ — периодическая с периодом T; тогда при любом $x\in\mathbf{Z}$ справедливо равенство

$$|x+T|+\sin(x+T)=|x|+\sin x.$$

В частности, при $x=0$ получаем уравнение

$$|T|+\sin T=0,$$

а при $x=-T$ — уравнение

$$|-T|-\sin T=0.$$

Складывая эти два равенства, получаем $\{T\}+\{-T\}=0$. Дробная часть $\{x\}$ любого числа x *неотрицательна*. Поэтому последнее равенство возможно только при $\{T\}=\{-T\}=0$, т. е. если T — целое число.

С другой стороны, если $\{T\}=0$, то из равенства $\{T\}+\sin T=0$ следует, что $\sin T=0$, т. е. $T=k\pi$ $(k\in Z)$. Но среди чисел такого вида целым является лишь число 0, так что наши уравнения имеют единственный общий корень $T=0$. А это означает, что функция $f(x)$ — непериодическая.

Свойство IV. *Если для периодической функции $f(x)$ с периодом T на некотором отрезке $[\alpha;\ \alpha+T]$ длиной T выполнено неравенство*

$$|f(x)|\leqslant M, \qquad (3)$$

то это неравенство выполняется и для любого значения аргумента.

Свойство IV вытекает из следующих рассуждений. Пусть $f(x)$ — периодическая функция с периодом T и пусть неравенство (3) справедливо при $\alpha\leqslant x\leqslant\alpha+T$. Тогда, в силу (2), это неравенство справедливо и на всяком отрезке

$$[\alpha+nT;\ \alpha+(n+1)T],\ n\in Z.$$

Однако каждое значение аргумента принадлежит одному из таких отрезков, и, следовательно, неравенство (3) выполняется для любого значения x.

Пример 4. *Доказать непериодичность функции*

$$f(x)=2x\cos(x^2).$$

Допустим, что эта функция — периодическая с периодом T. Так как при $x\in[0;T]$

$$|2x\cos(x^2)|\leqslant 2|x|\leqslant 2T,$$

то, согласно свойству IV, при любом $x\in R$ должно выполняться неравенство $|f(x)|=|2x\cos(x^2)|\leqslant 2T$. Но, как легко проверить, это неравенство нарушается, например, в точке $x=\sqrt{2\pi k}$, если только натуральное число k удовлетворяет условию $k>T^2/2\pi$.

Свойство V. *Если периодическая функция дифференцируема в каждой точке своей области определения, то ее производная — периодическая функция с тем же периодом.*

Докажем это свойство. Из предположения, что периодическая функция $f(x)$ с периодом T имеет производную $f'(x)$ в любой точке $x\in D(f)$, следует, что $D(f')=D(f)$. Отсюда ясно, что если $x\in D(f')$, то

$$x-T\in D(f'),\ x+T\in D(f').$$

Поскольку при любом $x\in D(f)$ выполняется равенство $f(x+T)=f(x)$, то $f(x+T)$ и $f(x)$ — это *одна и та же* функция. Но тогда и их производные тоже равны: $(f(x+T))'=f'(x)$. Функцию $f(x+T)$ можно рассматривать как сложную функцию аргумента x с «внутренней» функцией $x+T$ и «внешней» функцией f. Поэтому по формуле для производной сложной функции

$$(f(x+T))'=f'(x+T)\cdot(x+T)'=f'(x+T)$$

для любой точки $x\in D(f')$. Поэтому $f'(x+T)=f'(x)$ при любом $x\in D(f')$, так что $f'(x)$ — периодическая функция с периодом T.

Пример 5. *Доказать непериодичность функций*

$$f_1(x)=\sin(x^2);\quad f_2(x)=3\sin x+5\sin(x\sqrt{2}).$$

Вычислим производные этих функций:

$$f_1'(x)=2x\cos(x^2);$$
$$f_2'(x)=3\cos x+5\sqrt{2}\cos(x\sqrt{2}).$$

Функция $f_1'(x)$ не является периодической (см. пример 4), а потому не является периодической и функция $f_1(x)$. Функция $f_2'(x)$ также непериодическая (это доказывается так же, как и в примере 2); следовательно, $f_2(x)$ — непериодическая функция.

* * *

В заключение два примера посложнее.

Пример 6. *Доказать непериодичность функции*

$$f(x)=e^{\sqrt{\operatorname{arctg}|\sin(x^2)|}}.$$

Функция выглядит устрашающе, на первый взгляд совершенно неясно, какое из свойств здесь «поможет». Мы воспользуемся следующим фактом: *в случае периодичности функции $f(x)$ функция $g(f(x))$ также периодическая.*

Итак, пусть функция $f(x)$ — периодическая. Тогда периодическими должны быть и функции

$$f_1(x)=\ln(f(x))=\sqrt{\operatorname{arctg}|\sin(x^2)|},$$
$$f_2(x)=(f_1(x))^2=\operatorname{arctg}|\sin(x^2)|,$$
$$f_3(x)=\operatorname{tg}(f_2(x))=|\sin(x^2)|,$$
$$f_4(x)=(f_3(x))^2=\sin^2(x^2).$$

Однако производная последней из этих функций $f_4'(x)=2x\sin(2x^2)$ непериодична (см. пример 4). Полученное противоречие показывает, что предположение о периодичности функции $f(x)$ неверно.

Пример 7. *Доказать, что любой многочлен степени $n\geqslant1$ не является периодической функцией.*

Многочлен первой степени

$$P_1(x)=a_0x+a_1,\ a_0\neq0,$$

— хорошо знакомая линейная функция, возрастающая или убывающая (в зависимости от знака числа a_0) на всей числовой прямой и потому непериодическая.

Предположим, что многочлен степени $n>1$

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,\ a_0\neq0$$

— периодическая функция. По свойству V его производная $f'(x)$ — периодическая функция. Снова применяя свойство V, заключаем, что и его вторая производная $f''(x)=(f'(x))'$ — также периодическая функция, и т. д. Ясно, что периодической будет и его $(n-1)$-я производная; но эта производная

$$f^{(n-1)}(x)=n!a_0x+(n-1)!a_1$$

— линейная функция и потому периодической быть не может.

Упражнения

Определите, являются ли периодическими следующие функции:

1. $f_1(x)=|x|+\cos 2x$; $f_2(x)=|x|+\sin \pi x$.
2. $f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$; $f_2(x)=2\pi^x-3e^x$
3. $f_1(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$; $f_2(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)+\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$.
4. $f_1(x)=x\sin x$; $f_2(x)=\sin\sqrt{|x|}$.
5. $f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{при } x\neq 0,\\ 1 & \text{при } x=0;\end{cases}$ $f_2(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$
6. $f(x)=\sin(\ln(x^2+1))$.

Литература

1. Рывкин А. *Периодические функции.*— «Квант», 1973, № 5, с. 38—42.
2. Земляков А., Ивлев Б. *Периодические функции.*— «Квант», 1976, № 12, с. 34—39.
3. Гутенмахер В., Ивлев Б., Раббот Ж. *Сложение гармонических колебаний.*— «Квант», 1976, № 11, с. 44—46.

Информация

II Научно-техническая конференция школьников в МФТИ

В «Кванте» № 11 за 1986 год рассказывалось о первой научно-технической конференции школьников в МФТИ и предлагалось присылать рефераты и работы на следующую конференцию, запланированную на апрель 1987 года. Школьники откликнулись очень быстро. В начале марта этого года в МФТИ было прислано 220 работ из 33 городов страны. Омск и Львов, Свердловск и Тула, Киев, Челябинск, Тбилиси, Москва, Саратов, Запорожье и многие другие города были указаны в обратных адресах объемистых бандеролей с рефератами, графиками, схемами и программами для ЭВМ, поступивших в оргкомитет конференции. И вот 19 апреля 1987 года в Московском физико-техническом институте была проведена II Научно-техническая конференция школьников. На нее приехали около 100 участников из РСФСР, с Украины, из Белоруссии и Казахстана.

После торжественного открытия конференции начали работу секции математики, физики, теоретической физики и информатики, на которых участники выступили с докладами по своим работам. Затем состоялся просмотр «стендовых докладов» — работ, не заслушанных на секционных заседаниях.

Выступления школьников показали основное преимущество конференции перед олимпиадами и другими соревнованиями: возможность достаточно долго и глубоко разрабатывать заинтересовавшую тебя тему. Лучшие работы получились у ребят, творчески и аккуратно выполнивших эксперимент или проработавших большое количество литературы по теме реферата, а не у тех, кто за несколько дней переписал главу из вузовского учебника. Кроме того, выступление на конференции максимально приближено к настоящей научной работе, требующей творческого подхода к теме, больших затрат времени и труда.

После просмотра «стендовых докладов» перед ребятами выступили преподаватели МФТИ и специалисты из базовых институтов. Они ответили на многочисленные вопросы школьников. Участникам конференции были продемонстрированы различные физические эксперименты, в том числе эффект высокотемпературной сверхпроводимости, обнаруженный в начале 1987 года, буквально за два месяца до конференции.

Закончилась конференция награждением активных ее участников книгами по физике и математике (с автографами и пожеланиями авторов), грамотами МФТИ, дипломами и значками журнала «Квант». Но главной наградой для школьников было, наверное, само участие в конференции, знакомство с МФТИ — одним из ведущих вузов страны, встречи с учеными.

А теперь оргкомитет конференции ждет новых работ. Участником конференции может стать любой школьник. Для этого надо написать реферат (7—25 страниц), самостоятельно разобрав интересный вопрос по физике, технике, математике или программированию. Один экземпляр реферата надо до 1 февраля 1988 года выслать по адресу: 141700 г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, оргкомитет III Научно-технической конференции школьников, второй оставить себе. Все вопросы по темам рефератов и организации конференции можно выяснить по телефону ЗФТШ: 408-51-45.

А. В. Сапожников,
член оргкомитета конференции

Новосибирск — Андовер

Весной этого года состоялся обмен делегациями между Новосибирской ФМШ № 165 и известной частной школой США — Академией Филлипс, расположенной в штате Массачусетс в небольшом городке Андовере, в сорока километрах от Бостона. Восемь американских школьников с 17 марта по 14 апреля находились в Новосибирском Академгородке, а восемь сибиряков с 12 апреля по 7 мая — в Андовере. Своими впечатлениями о поездке в США делятся руководитель делегации зам. директора по учебно-воспитательной работе ФМШ № 165 В. Г. Харитонов и члены советской делегации.

В. Г. Харитонов:

Академия Филлипс — одна из старейших (основана в 1778 году) и самых престижных школ США. Обучаются в ней 1200 школьников четырех старших классов из 40 штатов США и 28 зарубежных стран. Отбор довольно строгий.

Городок Академии занимает несколько квадратных километров. По системе образования, принятой в США и, в частности, в Академии Филлипс, учебный год делится на три триместра. В каждом из них ученик должен выбрать пять различных курсов. Таким образом, у каждого школьника только пять предметов в триместре, но зато и уроки каждого предмета проводятся ежедневно. Обучение при этом всегда интенсивное.

Кабинеты естественно-научных дисциплин хорошо оборудованы, много наглядных пособий, которые широко используются. Огромные доски опоясывают стены аудитории. Есть в Академии Филлипс и своя астрономическая обсерватория с двумя вполне приличными телескопами. Школьники, выбравшие курс астрономии, должны провести ряд самостоятельных наблюдений.

Надо учитывать, что, выбирая те или иные курсы, американский школьник может, например, совсем не изучать физику. Различны уровни математических курсов.

Занятия — что-то промежуточное между лекцией и уроком. В группе 15—20 учеников, сидящих по одному за небольшими столиками.

Учитель много рассказывает, объясняет. Основная форма контроля — домашние задания и контрольные работы. Объем домашних заданий довольно велик, а так как уроки по всем предметам проходят каждый день, то ученикам Академии Филлипс приходится много и упорно трудиться.

Большое значение придается в Академии Филлипс занятиям спортом. Каждый ученик, кроме пяти курсов в триместр, обязан выбрать вид спорта, которым будет заниматься. По средам и субботам — встречи с другими школами как у себя, так и на выезде. Мы увидели несколько новых для нас интересных игр: бейсбол, лакросс*). Любопытно, что большинство тренеров — учителя других предметов. Спорт — это, так сказать, их общественная работа.

Итак, днем 12 апреля мы прибыли в Нью-Йоркский аэропорт имени Д. Кеннеди и с большой группой встречающих выехали в Андовер. В нашей делегации были девятиклассники: Ирина Павлова с Сахалина, Федор Бояркин из Бердска, Сергей Смирнов из Томской области и десятиклассники: Оксана Иванченко с Камчатки, Ольга Шуева из Кемерова, Андрей Васильев из Красноярска, иркутянин Александр Косых и алма-атинец Сергей Шаламов. Восемь советских школьников были размещены в восьми разных общежитиях. Все они, как и положено в Академии Филлипс, посещали пять различных курсов. Занятия по английскому языку и по программированию на языке «Паскаль» были организованы специально для гостей. Те курсы, которые мы выбрали по математике и физике, по уровню оказались немного слабее курсов ФМШ, но все же весьма похожими. Правда, из-за несовпадения по времени учебных программ курс математики был весьма прост для советских школьников (тема «Дифференцирование функций» в ФМШ была уже пройдена), а курс физики для девятиклассников был очень сложен (заканчивалась тема «Электромагнетизм», которая в ФМШ изучается в десятом классе). Тем не менее эти занятия были весьма полезны, особенно для совершенствования в английском языке, понимания жизни американских школьников.

Очень интересными оказались уроки искусства. В той части курса, на которую попали мы, изучались основы композиции в фотографии и живописи. При этом основное внимание уделялось развитию фантазии, умению видеть окружающий мир, творческому подходу. Обычно этот курс выбирают те школьники, которые хотят стать художниками, архитекторами, дизайнерами.

Из многих видов спорта, культивируемых в Андоверской школе, С. Шаламов выбрал софтбол*), а остальные — теннис.

Обширной была культурная программа. Мы посетили города Рокпорт и Глостер на берегу Атлантического океана, в Бостоне осмотрели океанский аквариум, дельфиний цирк, музей Науки, побывали на выступлении в том же Бостоне советского поэта Е. Евтушенко. Состоялась экскурсия по всемирно известному Гарвардскому университету. Кроме того, наша делегация участвовала в культурной жизни в самой Академии Филлипс. Многие советские школьники побывали в семьях американцев, живущих неподалеку от Андовера.

Последние три дня советские школьники провели в Нью-Йорке. Мы успели посмотреть довольно много: Метрополитен музей, музей современного искусства, фондовую биржу, побывали на смотровой площадке самого высокого в городе небоскреба, на матче бейсбольных команд, в одном из Бродвейских музыкальных театров.

Важной частью программы обмена были непосредственные контакты между школьниками. Может быть, это было даже главным, ибо позволило нам не только познакомиться друг с другом, но и завязать дружеские связи между отдельными людьми и между школами.

---

*) Лакросс — игра, придуманная североамериканскими индейцами, чем-то напоминающая хоккей на траве, но со своеобразными клюшками в виде сачков.

*) Софтбол — облегченный вариант бейсбола.

Советская делегация в Рокфеллеровском центре в телестудии NBC (Нью-Йорк).

Интерес к представителям СССР в Андовере был очень большой. Абсолютное большинство школьников и учителей, с которыми мы общались, были настроены очень дружелюбно к нашей стране и советским людям. Большое внимание уделяли программе обмена американское телевидение, радио и газеты. Информация о нас и об американской делегации в Сибири публиковалась в газетах «Бостон Глоб», «Лауренс Трибюн», местных андоверских газетах. Информация была в основном объективна и доброжелательна.

Подводя некоторые итоги первого обмена, надо отметить, что накопленный за 200 лет опыт работы одной из самых престижных американских школ может быть полезен для советского народного образования. Заслуживают глубокого изучения отдельные курсы и учебники, особенно по естественно-научным предметам и иностранным языкам, широкое применение компьютерной техники не только в математике, но и в преподавании искусства, языков и т. д. Много интересного можно почерпнуть в области конкретной методики преподавания различных предметов. С другой стороны, у американских партнеров большой интерес вызывает опыт работы Новосибирской ФМШ в условиях крупного научного и университетского центра, в частности, оригинальные курсы математики, физики, совершенно новый курс «Математическое моделирование физических процессов с помощью ЭВМ», система эстетического воспитания и организация жизни большого ученического коллектива в целом.

Обмен решено продолжить. Скоро в Новосибирск и в Андовер должны приехать следующие делегации уже в составе 10 учащихся.

О. Шуева:

Самое, пожалуй, главное — американские ровесники стали нашими очень хорошими друзьями. С ними я могла говорить буквально обо всем, потому что они пытались понять, вслушаться и высказать свою точку зрения. Между девчонками о политике мы говорили довольно мало, обсуждая только какие-то внешние аспекты. Но именно там я поняла, что в США создаются некоторые стереотипы нашей страны, хотя вообще к нам относились очень дружелюбно и гостеприимно.

О том, как мы учились. Каждый день у нас было 5 уроков по 50 минут.

Английский язык — курс, специально подготовленный для нас, где мы читали «Старик и море» и говорили с ребятами-американцами на заданную тему, пытались читать и понимать стихи.

Программирование вел замечательный учитель, не только профессионал своего дела, но и удивительный артист — импровизатор. Очень много работали на машинах, изучая ТУРБО-ПАСКАЛЬ, а главное — имели возможность узнать, какими могут быть уроки программирования в школе.

Курс искусства поразил и заинтересовал меня своей необычностью. Я бы сказала, неординарностью. У нас в ФМШ тоже есть курс истории искусств, но здесь мы чисто теоретически (хотя очень-очень интересно) изучали художников, скульпторов по определенным историческим этапам. В Андовере я была в группе, в которой на все объекты нас учили смотреть как-то со всех сторон, со всеми особенностями. Надо сказать, что этому было не трудно, но важно научиться. Вообще уроки искусства состояли из двух частей: рисования и фотодела. Например, нам нужно было получить фотографии разных типов:

1. Уловить очень интересный момент.
2. Сделать абстрактную фотографию.

При фотографировании мы пользовались самыми простыми фотоаппаратами. В школе есть специально оборудованная лаборатория для проявления пленок и печати фотографий.

Математика — очень часто проводились тесты на основе того, что рассказал учитель. Сдали их с честью!

Физика — в течение всего урока преподаватель доказывал все свои выводы соответствующими опытами.

Учителя Андоверской школы на уроке ведут себя очень раскованно, объясняя до тех пор, пока классу не станет все-все понятно, обладают высокой артистичностью, не вызывают к доске на уроках, но часто проводят не очень сложные тесты. На уроках (на всех) идет обсуждение со всей группой того, что учащиеся уже прочитали.

Андоверские школьники все занимаются каким-то видом спорта, учатся неистово, докапываясь до самой сути (не отстанут от учителя, пока он им все не только объяснит, но и докажет), очень талантливые ребята (это особенность самой школы), главное — думающие.

Без сомнения, поездка в Америку — это и отличная практика в английском языке. Первую неделю в Андовере мы говорили на английском языке гораздо лучше, так как очень аккуратно использовали те правила и основы, что получили на уроках и специальной предварительной подготовке (по английскому языку), которую проводили наши учителя. Но потом, когда стандартных фраз уже стало не хватать, мы стали изъясняться так, что американцы понимали нас с великим трудом. Зато мы уже привыкли, адаптировались и легко воспринимали информацию. Примерно к концу третьей недели я могла свободно и понятно говорить со своими соседями, друзьями.

С. Шаламов:

В Андовере мы помогли американским школьникам получить реальные и правдивые представления о советских школьниках. Оказалось, что между нами не так много различий.

Очень хорошо бы перенять у андоверских учащихся их работоспособность. Они занимаются очень много. Меня поразило поведение на уроках школьников и учителя. При всей своей свободности и раскованности ребята слушают его весь урок, и весь урок в классе тишина. Учителя очень подробно и хорошо объясняют материал, совмещая жесткий контроль с дружеским общением.

А. Васильев:

Все американцы, с которыми мы встречались (особенно в Андовере, где расположена школа), относились к нам очень хорошо. Везде мы встречали и желание понять, и желание помочь, где необходимо. Конечно, возникали у нас трудности с языком, особенно вначале, но и они были преодолимы.

Система образования в Академии Филлипс сильно отличается от нашей. Многое из того, что мы увидели, было бы полезно и у нас. Например, мне понравился урок искусства. На этом уроке учитель учит не мастерству рисования или фотографирования, а умению видеть мир, смотреть на что-то обычное с необычной точки. Кстати, слово «учит» здесь не совсем верно, учитель не дает указания, а советует, никогда не настаивая на своей точке зрения.

О. Иванченко:

За месяц учебы я узнала много нового не только из курсов, которые посещала, но и из жизни учащихся Академии Филлипс.

Отношения между учителем и учеником в этой школе свободнее, чем у нас, нет традиции поднимать руку, вставать перед учителем. Однако чувствовалось огромное уважение с обеих сторон. Ни разу не замечала, чтобы ученики отвлекались во время уроков. Учитель может несколько раз объяснять непонятиую вещь, никого этим не смущая. Учащиеся сами выбирают курсы, поэтому у них бо́льшая заинтересованность в их изучении.

Неизгладимое впечатление оставил школьный драматический театр. Андоверские школьники — замечательные артисты.

А. Косых:

Я жил среди американцев, молодых американцев. И я видел, что они подчас думают о нас то же самое, что и мы о них. Сейчас я хорошо понимаю их и гораздо лучше понимаю себя, друзей — нас.

Ф. Бояркин:

Отношение к нам со стороны американских учащихся и жителей Андовера, с которыми мы общались, было очень хорошее и доброе. Нигде мы не встретили ненависти к нам как к советским людям. В разговорах с американцами всегда чувствовалось желание узнать что-то новое о нашей стране, о нашей школе и о многом другом.

Я понял, что у американцев те же мысли и интересы, они хотят дружбы между нашими странами.

И. Павлова:

Мы получили возможность свободного, если можно так сказать, «неофициального» общения с нашими сверстниками в Соединенных Штатах. Мы смогли сами, не из вторых рук узнать друг друга. Я, например, после двух недель пребывания чувствовала себя обыкновенной ученицей этой школы. Между нами и учениками Академии Филлипс не было никакой преграды, затрудняющей общение. Мне очень понравились естественность, ненатянутость наших отношений.

Мы получили прекрасную возможность изучать английский язык. Пожалуй, обмен дал толчок к более интенсивному изучению иностранного языка в школе. Мы на деле убедились, как он необходим.

В Академии Филлипс очень многие ученики играют на каких-либо музыкальных инструментах. У нас есть музыкальные и художественные школы, в которых учатся дети, имеющие способности, но учащиеся старших классов поступить в них уже не могут. Было бы неплохо, если бы в наших школах мы изучали музыку, но не в начальных классах, а в старших.

Олимпиады

Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике

7 класс

1. Мальчик действует на рычаг с силой $F=400$ Н (рис. 1). Какова максимальная масса груза, который он может поднять, используя данное устройство, если $l_1=1$ м, $l_2=6$ м, $R=0{,}5$ м?

2. В прошлом из-за отсутствия транспорта снег из крупных городов не вывозили, а растапливали с помощью специальных печей, которые устанавливались во дворах. Для растапливания снега использовали дрова, теплота сгорания которых $q=1{,}0\cdot10^7$ Дж/кг. Оцените, какое минимальное количество дров требуется на зиму для очистки таким образом двора площадью 500 м^2, если толщина снежного покрова за зиму достигает 40 см. Плотность снега $\rho=700$ кг/м^3, его удельная теплота плавления $\lambda=3\cdot10^5$ Дж/кг.

3. Английский ученый XVIII века Ф. Гауксби поставил такой опыт. Стеклянный шар окружили горизонтально расположенным металлическим ободом, центр которого совпадал с центром шара. К ободу по всему периметру привязали тонкие льняные нити. Когда шар зарядили, нити оказались направленными к центру шара. Гауксби заметил, что если при этом поднести палец к свободному концу одной из нитей, то между нитью и пальцем возникает взаимодействие. Если же поднести палец к участку нити, близкому к точке закрепления, то характер взаимодействия меняется на противоположный. В каком случае Гауксби наблюдал отталкивание нити и пальца, а в каком — притяжение?

4. На лабораторных занятиях учитель собрал цепь из пяти резисторов с одинаковыми сопротивлениями и подключил ее к сети постоянного тока (рис. 2). После этого учащимся Ане, Боре, Вите, Грише и Диме были выданы одинаковые школьные вольтметры, с помощью которых каждый должен был измерить напряжение на резисторе, помеченном соответствующей буквой. Результаты измерений оказались следующими: Аня — 1 В, Боря — 1 В, Витя — 2 В, Гриша — 4 В, Дима — 5 В. Проверяя вольтметры после занятий, учитель обнаружил, что у одного из них смещена шкала. Кто из ребят пользовался неисправным вольтметром?

8 класс

1. Школьная линейка длиной $l=20$ см висит на высоте h над горизонтально направленным лучом лазера (рис. 3). В некоторый момент времени линейку отпускают. Определите h, если известно, что падающая линейка перекрыла луч на время $\tau=0{,}5$ с.

2. Кусок мыла массой m соскальзывает в ванну, профиль которой изображен на рисунке 4. Высота ванны h, радиусы закруглений R. Начертите график зависимости суммарной силы давления куска мыла на ванну от мгновенного положения мыла. Трение между мылом и ванной отсутствует, начальная скорость равнялась нулю.

3. Определите среднюю скорость движения электронов в медном проводе сечением $S=1$ мм^2, когда по нему течет ток $I=1$ А. Плотность меди $\rho=8{,}9$ г/см^3, молярная масса $M=64$ г/моль. Известно, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон, заряд которого $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл. Число Авогадро (количество молекул в одном моле вещества) $N_A=6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$.

4. Схема, изображенная на рисунке 5, собрана из батарейки, двух одинаковых вольтметров и двух одинаковых миллиамперметров. Параллельно соединенные приборы показывают $U_1=0{,}25$ В и $I_1=0{,}75$ мА, второй миллиамперметр показывает $I_2=1$ мА. Определите напряжение батарейки и сопротивления приборов.

5. Система состоит из трех подвижных невесомых блоков, соединенных невесомыми нитями (рис. 6). Массы грузов, подвешенных к крайним блокам, одинаковы и равны M. а) При каких значениях массы m груза, подвешенного к центральному блоку, и коэффициента трения μ между крайними блоками и опорами система будет находиться в равновесии? б) Будет ли равновесие устойчивым?

9 класс

1. Система, изображенная на рисунке 7, падает с некоторой высоты h. Во время падения тело массой m неподвижно относительно коробки (масса коробки M). Какой должна быть высота h, чтобы после абсолютно неупругого удара об пол коробка подскочила? Жесткость каждой пружины k.

2. В исходном состоянии схемы (рис. 8) конденсаторы не заряжены и ключ K не замкнут. Какой заряд протечет через резистор сопротивлением $R=800$ Ом, если замкнуть ключ? $\mathcal{E}_1=10$ В, $\mathcal{E}_2=20$ В, $C_1=1$ мкФ, $C_2=2$ мкФ.

3. Один моль идеального одноатомного газа последовательно участвует в двух процессах: 1—2 и 2—3 (рис. 9). В первом из них давле-

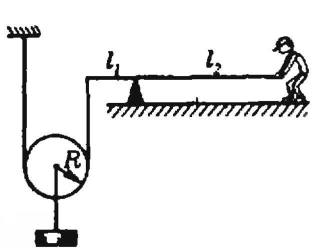


Рис. 1.

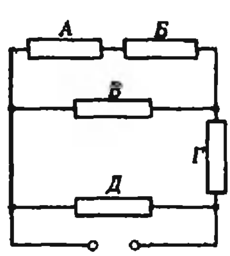


Рис. 2.

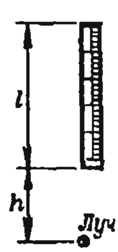


Рис. 3.

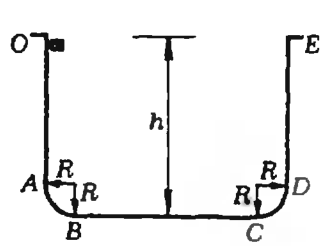


Рис. 4.

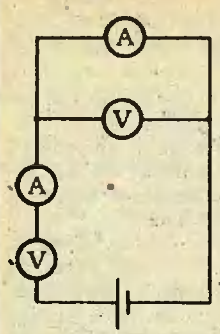


Рис. 5.

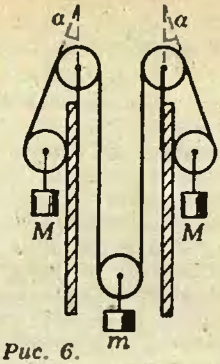


Рис. 6.

Рис. 7.

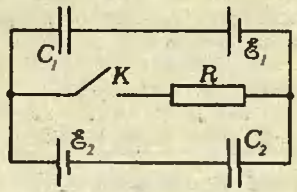


Рис. 8.

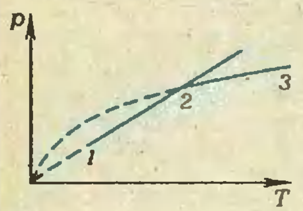


Рис. 9.

Рис. 10.

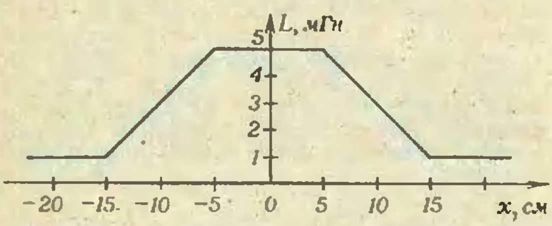


Рис. 11.

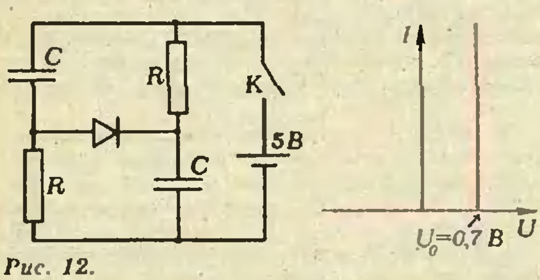


Рис. 12.

ние p пропорционально температуре T, во втором p пропорционально $\sqrt{T}$. Определите теплоемкость газа в каждом из двух процессов.

4. Сфера радиусом R разрезана на две половины, которые равномерно покрыты зарядом с поверхностной плотностью σ_1 и σ_2 соответственно. Сферу окружают проводящей заземленной оболочкой, радиус которой близок к радиусу сферы. Найдите силы, действующие на обе половинки сферы (краевыми эффектами вблизи линии разреза можно пренебречь). Изменятся ли эти силы, если оболочка будет не заземленной, а изолированной?

5. В кастрюлю объемом $V=1{,}5$ л налито $m=200$ г молока. Хорошо известно, что при кипячении молока на его поверхности появляется плотная пенка. Кастрюля стоит на плите и нагревается от $t_1=98\ ^\circ$C до $t_2=99\ ^\circ$C за $\tau=0{,}5$ мин. Через какое время после этого молоко убежит? Обычное молоко на 90 % состоит из воды, удельная теплоемкость которой $c=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К), а удельная теплота парообразования $r=2{,}3\cdot10^6$ Дж/кг. Теплоемкостью кастрюли пренебречь.

10 класс

1. Жюри олимпиады заседало в комнате площадью $S=20$ м^2 и высотой $H=3$ м. В результате жарких споров температура воздуха в комнате повысилась от $t_1=17\ ^\circ$C до $t_2=21\ ^\circ$C, а влажность — от $\varphi_1=40\,\%$ до $\varphi_2=60\,\%$. При температуре t_1 давление насыщенных паров воды $p_1=1{,}94$ кПа, а при температуре t_2 — $p_2=2{,}49$ кПа. Молярная масса водяного пара $M=0{,}018$ кг/моль. Сколько воды испарилось в комнате?

2. В цилиндрической коробке радиусом R с гладкими стенками находится маленькая шайба, масса которой совпадает с массой коробки, причем расстояние от центра коробки до шайбы составляет половину радиуса коробки. В некоторый момент времени коробке сообщили скорость $\vec{u}$, направленную вправо, а шайбе — такую же по модулю скорость, направленную влево (рис. 10). Определите траекторию движения коробки по столу. Удары абсолютно упругие, трение отсутствует.

3. Короткозамкнутая сверхпроводящая катушка имеет железный сердечник, который может перемещаться вдоль ее оси. Зависимость индуктивности L катушки от смещения x центра сердечника относительно центра катушки показана на рисунке 11. В начальном состоянии $x=0$ (сердечник вставлен в катушку), ток в катушке $I_н=1$ А. Затем сердечник вынимают. Чему будет равен ток в катушке после этого?

4. В исходном состоянии схемы (рис. 12) конденсаторы не заряжены. В момент $t=0$ ключ K замыкают. Найдите заряд, протекший через диод, если $R=10$ кОм, $C=1$ мкФ, внутренним сопротивлением батареи можно пренебречь. Вольтамперная характеристика диода приведена на графике на рисунке 12.

Публикацию подготовили
А. И. Буздин, С. С. Кротов, О. Ю. Овчинников

Задачи пятидесятой Московской городской математической олимпиады

Заключительный тур пятидесятой Московской городской математической олимпиады состоялся 15 февраля 1987 года в Московском университете. В нем участвовало 697 школьников 7—10 классов. Ниже приводятся задания этого тура (рассчитанные на 4 часа). Пять из задач этого списка были включены в «Задачник «Кванта», и в этом номере публикуются их решения.

7 класс

1. В марте 1987 года учитель решил провести 11 занятий математического кружка. Доказать, что если по субботам и воскресеньям

кружок не проводить, то в марте найдутся три дня подряд, в течение которых не будет ни одного занятия кружка.

2. Доказать, что из любых 27 различных натуральных чисел, меньше 100, можно выбрать два числа, не являющиеся взаимно простыми.

3. По поляне, имеющей форму равностороннего треугольника со стороной 100 м, бегает волк. Охотник убивает волка, если стреляет в него с расстояния не более 30 м. Доказать, что охотник может убить волка, как бы быстро тот ни бегал.

4. Пусть AB — основание трапеции $ABCD$. Доказать, что если $AC+BC=AD+BD$, то трапеция $ABCD$ — равнобокая.

5. Али-Баба и 40 разбойников решили разделить клад из 1987 золотых монет следующим образом: первый разбойник делит весь клад на две части, затем второй разбойник делит одну из частей на две части и т. д. После 40-го деления первый разбойник выбирает наибольшую из частей, затем второй разбойник выбирает наибольшую из оставшихся частей и т. д. Последняя, 41-я часть достается Али-Бабе. Для каждого из 40 разбойников определить, какое наибольшее количество монет он может себе обеспечить при таком дележе независимо от действий других разбойников.

8 класс

1. Доказать, что если $a>b>0$ и $\frac{x}{a}<\frac{y}{b}$, то справедливо неравенство $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)>\frac{x+y}{a+b}$.

2. Школьник хочет вырезать из квадрата размером $2n\times 2n$ наибольшее количество прямоугольников размером $1\times(n+1)$. Найти это количество для каждого натурального значения n.

3. (M1042). В классе организуется турнир по перетягиванию каната. В турнире ровно по одному разу должны участвовать всевозможные команды, которые можно составить из учащихся этого класса (кроме команды всего класса). Доказать, что каждая команда учащихся будет соревноваться с командой всех остальных учащихся класса.

4. В пятиугольнике $ABCDE$ углы при вершинах B и D — прямые, $\angle BCA=\angle DCE$, а точка M — середина стороны AE. Доказать, что $MB=MD$.

5. Можно ли выбрать некоторые натуральные числа так, чтобы при любом натуральном значении n хотя бы одно из чисел n, $n+50$ было выбрано и хотя бы одно из чисел n, $n+1987$ не было выбрано?

9 класс

1. Даны 7 различных цифр. Доказать, что для любого натурального числа n найдется пара данных цифр, сумма которых оканчивается той же цифрой, что и число.

2. (M1041). По k вершинам правильного пятиугольника с помощью двусторонней линейки восстановить остальные вершины в случае: а) $k=4$; б) $k=3$. (Двусторонней линейкой можно делать то же, что и обычной линейкой без делений, а также проводить прямую, параллельную данной, на расстоянии, равном ширине линейки.)

3. Найти такие 50 натуральных чисел, что ни одно из них не делится на другое, а произведение любых двух из них делится на любое из оставшихся чисел.

4. Доказать, что для любых чисел $a_1, \ldots, a_{1987}$ и положительных чисел $b_1, \ldots, b_{1987}$ справедливо неравенство

$$\frac{(a_1+\ldots+a_{1987})^2}{b_1+\ldots+b_{1987}}\leqslant\frac{a_1^2}{b_1}+\ldots+\frac{a_{1987}^2}{b_{1987}}.$$

5. Таня уронила мячик в огромный прямоугольный бассейн. Она хочет его достать с помощью 30 узких досок длиной 1 м каждая, построив из них мостики так, чтобы каждая доска опиралась концами на края бассейна или на уже положенные доски и чтобы в итоге одна из досок прошла над мячиком. Доказать, что Тане не удастся это сделать, если расстояния от краев бассейна до мячика превышают 2 м.

10 класс

1. (ср. M1044). а) Доказать, что из трех положительных чисел всегда можно выбрать такие два числа x и y, что $0\leqslant\frac{x-y}{1+xy}\leqslant 1$.

б) Верно ли, что указанные два числа можно выбрать из любых четырех чисел?

2. Углы, образованные сторонами правильного треугольника с некоторой плоскостью, равны α, β и γ. Доказать, что одно из чисел $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ равно сумме двух других.

3. На клетчатой бумаге закрашены 17 единичных клеток. Доказать, что их можно покрыть прямоугольниками, сумма периметров которых не превосходит 100, причем расстояние между любыми точками разных прямоугольников не меньше $\sqrt{2}$.

4. (M1043). Можно ли разбить множество целых чисел на три подмножества так, чтобы для любого целого значения n числа n, $n-50$, $n+1987$ принадлежали трем разным множествам?

5. (M1045). В некотором царстве, территория которого имеет форму квадрата со стороной 2 км, царь решает созвать всех жителей к 7 ч вечера к себе во дворец на бал. Для этого он в полдень посылает с поручением гонца, который может передать любое указание любому жителю, который в свою очередь может передать любое указание любому другому жителю и т. д. Каждый житель до поступления указания находится в известном месте (у себя дома) и может передвигаться со скоростью 3 км/ч в любом направлении (по прямой). Доказать, что царь может организовать оповещение так, чтобы все жители успели прийти к началу бала.

Задачи предложили: *А. Андреев* (IX, 4), *С. Гашков* (VIII, 1; IX, 1), *М. Гринчук* (IX, 2; IX, 5), *С. Конягин* (VII, 3; VIII, 5; X, 4; X, 5), *Л. Конягина* (VII, 1), *О. Леонтьева* (IX, 3), *В. Прасолов* (X, 2), *И. Сергеев* (VII, 2; VII, 4; VII, 5; VIII, 3; VIII, 4; X, 1; X, 3). *Публикацию подготовил И. Н. Сергеев.*

Ответы, указания, решения

Соображения непрерывности

1 а), в). Будем поворачивать прямую, проходящую через данную точку, вокруг этой точки и следить за разностью площадей частей фигуры, лежащих по разные стороны прямой. После поворота на 180° эта разность поменяет знак. Поэтому в некоторый момент она была равна нулю.

б). Если точка «уходит» в бесконечность, то семейство прямых, проходящих через нее, превращается в семейство параллельных прямых, а задача 1,а превращается в задачу, разобранную в тексте.

г). В п. а — да; в п. в — нет, как показывает пример точки, расположенной в центре круга.

2 а). В каждом направлении можно провести единственную прямую, делящую площадь первой фигуры пополам. Будем изменять направление, беря всякий раз прямую, делящую пополам площадь первой фигуры, и будем следить за разностью площадей частей второй фигуры, лежащих по разные стороны прямой.

в). Соедините центры параллелограммов.

3. Будем изменять направление прямой, делящей площадь фигуры пополам, и следить за разностью периметров частей границы, лежащих по разные стороны прямой.

4 а). После изменения направления выбранных касательных параллельных хорд на 180° величина S_1-S_2 поменяет знак. Значит, был такой момент, когда $S_1-S_2=0$.

5. В любом направлении можно провести ровно две хорды, каждая из которых делит площадь в отношении 1:2. После изменения направления на 180° эти хорды поменяются местами.

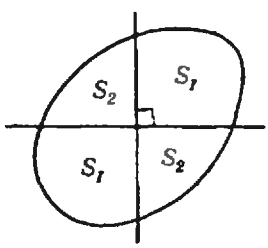


Рис. 1.

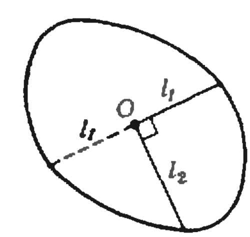


Рис. 2.

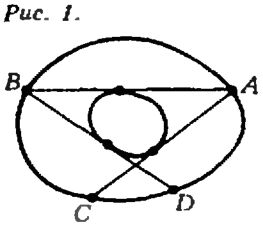


Рис. 3.

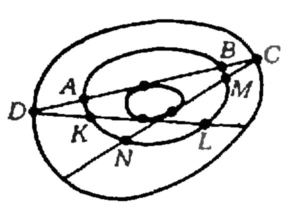


Рис. 4.

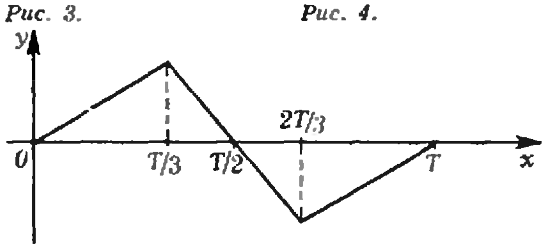


Рис. 5

6. Существует единственный прямоугольник, описанный около фигуры, две стороны которого имеют данное направление. Если изменить это направление на перпендикулярное, пары параллельных сторон прямоугольника поменяются местами.

7 б). Выберем прямую данного направления, делящую площадь фигуры пополам, и проведем перпендикулярную ей прямую, также делящую площадь фигуры пополам. Тогда площади накрест лежащих частей фигуры равны (рис. 1). После изменения направления на 90° части S_1 и S_2 поменяются местами, т. е. изменится знак разности S_1-S_2. Значит, был момент, когда $S_1-S_2=0$, т. е. $S_1=S_2$.

8. Проведем из центра симметрии O два перпендикулярных отрезка l_1 и l_2 (рис. 2). После изменения направления на 90° эти отрезки поменяются местами. Значит, в некоторый момент $l_1=l_2$.

9 а). Можно рассуждать, как в задаче 4,*а*.

б). Пусть AB — касательная хорда наибольшей длины (рис. 3). Тогда $AC\leqslant AB$ и $BD\leqslant AB$. Будем передвигать точку B по внешней кривой и следить за разностью длин правой и левой касательных хорд, проведенных из точки к внутренней кривой. В точке B эта разность неположительна, а в точке A — неотрицательна. Значит, в некоторой точке она равна нулю.

10. Рассуждаем, как в задаче 9. Если AB имеет наибольшую длину (рис. 4), то $MN\leqslant AB$ и $KL\leqslant AB$. Будем передвигать точку C по внешней кривой и следить за разностью длин правой и левой хорд средней кривой, проходящих через эту точку и касающихся внутренней кривой. В точке C эта разность неотрицательна, а в точке D — неположительна.

12. Будем отсчитывать время в часах от позавчерашней полуночи. Пусть $f(t)$ — температура в момент t; $g(t)=f(t+24)-f(t)$. По условию $f(24)<f(0)$ и $f(48)>f(24)$. Значит, $g(0)<0$ и $g(24)>0$. Следовательно, найдется такое t, что $g(t)=0$. В этот момент $f(t+24)=f(t)$.

13. Пусть $[a;\ b]$ — данный отрезок; $g(x)=f(x)-x$. Тогда $g(a)\geqslant 0$, $g(b)\leqslant 0$ (сделайте рисунок). Значит, найдется такое x, что $g(x)=0$ и $f(x)=x$.

14. Если $f(x)\neq x$ при всех x, то $f(x)>x$ при всех x или $f(x)<x$ при всех x. Если $f(x)>x$, то $f(f(x))>f(x)>x$. Поэтому уравнение $f(f(x))=x$ не имеет решений. Аналогично в случае $f(x)<x$.

15 в). Пусть хорд длиной $l=T\cdot\frac{p}{q}$ не существует. Тогда уравнение $f(x+l)=f(x)$ не имеет решений, т. е. $f(x+l)>f(x)$ для всех x или $f(x+l)<f(x)$ для всех x. Рассмотрим первый случай. Тогда $f(x+ql)>f(x+(q-1)l)>\ldots>f(x)$. Но $f(x+ql)=f(x+pT)=f(x)$, так как T — период. Получилось противоречие. Второй случай рассматривается аналогично.

г). Пусть l несоизмеримо с периодом. Пусть $|f(x+l)-f(x)|\geqslant\varepsilon>0$ для всех x. Тогда $|f(x+nl+kT)-f(x)|\geqslant\varepsilon$ для любых целых n и k. Но числа n и k можно подобрать так, что величина $\delta=nl+kT$ станет настолько малой, что $|f(x+\delta)-f(x)|<\varepsilon$. Получилось противоречие.

16 в). Рассуждение — как в задаче 15,в.

г). См. рис. 5.

17. Если среднее значение функции равно нулю, то у нее есть как неположительные, так и неотрицательные значения. Поэтому можно применить теорему о промежуточном значении.

18. $\int_0^{2\pi} \sin pxdx = -\left.\frac{\cos px}{p}\right|_0^{2\pi} = 0$, и аналогично $\int_0^{2\pi} \cos qxdx = 0$. Поэтому среднее значение $f(x)$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$ равно нулю.

Функции периодические и непериодические

1. $f_1(x)$ — непериодическая; $f_2(x)$ — периодическая.
2. $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — непериодические.
3. $f_1(x)$ — непериодическая; $f_2(x)$ — периодическая (указание: докажите, что $f_2(x)=0$, $x \in \mathbb{R}$).
4. $f_1(x)$ — непериодическая; $f_2(x)$ — непериодическая (указание: рассмотрите уравнение $f_2(x+T)=f_2(x)$ относительно T при $x=0$ и при $x=\pi^2$).
5. $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — непериодические (указание: решите уравнения $f_1(x)=0$ и $f_2(x)=0$).
6. $f(x)$ — непериодическая (указание: вычислите производную функции $f(x)$ и докажите ее непериодичность).

Кто с кем танцует?
(см. с. 37)

Обозначим возраст Игоря через x, возраст Антона через y и возраст Максима через z. Тогда всем шестерым танцорам будет $2(x+y+z)-9=115$ лет, так как каждая девушка на 3 года моложе своего партнера. Отсюда следует также, что Юля не может быть партнершей ни Игоря, ни Антона, так как суммы их возрастов — четные числа, и следовательно, возрасты не могут отличаться на 3. Итак, Юля — партнерша Максима, ей $(z-3)$ года, Игорю $(39-z)$ лет, Антону $(43-z)$ лет. Подставляя полученные значения для x и y в первое уравнение, получаем $z=20$, $y=23$, $x=19$. Таким образом, самый молодой — Игорь, с ним танцует Ира, а Светлана танцует с Антоном.

Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике

7 класс

1. $m_{max}=480$ кг (результат не зависит от радиуса блока).
2. $m_{min}=4200$ кг.
3. Притяжение наблюдалось при поднесении пальца к свободному концу нити.
4. Смещенная шкала была у вольтметра, которым пользовался Дима.

8 класс

1. Перекрытие луча на время, указанное в условии задачи, невозможно — задача не имеет решения.
2. См. рис. 6.
3. $v=IM/(e\rho SN_A)=0{,}075$ мм/с.
4. $R_A=U_1/I_1=333$ Ом; $R_V=U_1/(I_2-I_1)=1000$ Ом; $U_б=U_1+I_2(R_V+R_A)=1{,}58$ В.
5. а) $m=2M/(1+\cos\alpha)$; $\mu \geqslant 1/\sin\alpha$; б) равновесие устойчивое.

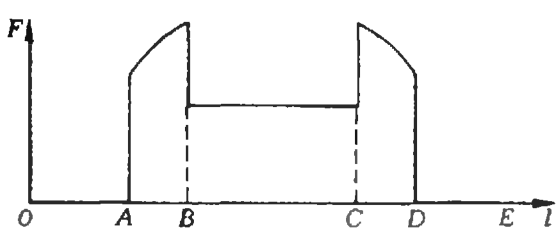


Рис. 6.

9 класс

1. $h \geqslant \frac{Mg}{2k}\left(1+\frac{M}{2m}\right)$.
2. $Q=C_1\mathscr{E}_1+C_2\mathscr{E}_2=5\cdot10^{-5}$ Кл.
3. $C_1=C_V=\frac{3}{2}R$; $C_2=C_V+\frac{1}{2}R=2R$.
4. $F_1=\pi R^2\sigma_1^2/(2\varepsilon_0)$; $F_2=\pi R^2\sigma_2^2/(2\varepsilon_0)$; силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ направлены противоположно друг другу и перпендикулярно плоскости, разделяющей обе половины сферы.
5. Молоко убежит примерно через 1,5 минуты.

10 класс

1. $\Delta m = \frac{MSH}{R\cdot100\%}\left(\frac{\varphi_2 p_2}{T_2}-\frac{\varphi_1 p_1}{T_1}\right)=0{,}313$ кг.
2. Центр коробки движется внутри окружности радиусом $R/2$ по траектории в виде равностороннего треугольника.
3. $I_к=I_н L_н/L_к=5$ А.
4. $q=C(\mathscr{E}-U_0)/2=2{,}15\cdot10^{-6}$ Кл.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 8)

1. а) Правая часть делится на 11, а левая — нет. б) Левая часть делится на A, а правая — лишь при $A=1$; значит, $A=1$, и из уравнения $(10+B)\cdot111=(101+10\cdot B)\cdot11+1$, получаем, что $B=2$. в) Левая и правая части представляются, как $\overline{AB}\cdot\overline{AA}\cdot101$.
2. Сумма всех очков домино равна 168. В среднем в кучках по 42 очка. Теперь нетрудно подобрать нужные значения сумм очков: 37, 41, 43, 47.
3. 9453,5+9453,5=18 907.
4. Магнитное поле Земли оказывает ориентирующее действие на стрелку компаса. Если бы жестко скрепленную с пробкой стрелку поставили не на воду, а на шероховатую твердую поверхность, то сила трения покоя не дала бы пробке развернуться так, чтобы стрелка указывала на север. В воде же сила трения покоя отсутствует; поэтому под действием магнитного поля Земли опущенная на воду пробка с закрепленной на ней стрелкой компаса начнет совершать колебания около направления на север. В конце концов из-за сопротивления воды эти колебания затухнут, и стрелка будет указывать на север.
5. 2,2,8,4,3,2,2,2,3,2.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 6)

Задание 11 (Д. Годес, 1983 г.). 1. **Cg5!** **a2** 2. **Cf6** **Kpd2** 3. **c4** **Kpd3**. Черные пытаются спастись при помощи геометрического маневра Рети — направляясь одновременно и к слону, и к пешке. Однако их ждет разочарование. 4. **c5** **Kpe4** 5. **c6** **Kpf5**. Если слон отступает, то черный король попадает в квадрат пешки. Но ... 6. **c7!** **Kp:f6** 7. **c8Ф** **a1Ф** 8. **Фh8+** и 9. **Ф:a1**. Теперь понятно, почему не годилось 1. **Cd4** или 1. **Cf4**.

Задание 12 (И. Крихели, 1984 г.) 1. a4 Kf2 2. a5 Ke4 3. a6 Kd6+ 4. Kpd7 Kb5 5. f5 Kpg5 6. Kpc6 Ka7+ 7. Kpb7 Kb5 8. Kpb6 Kd6 9. Kpc6 Kc8 10. Kpd7 Ka7. Кажется, что конь легко удерживает пешку «а», а другая пешка тем более не опасна, так как рядом с ней черный король. И все же, успешно маневрируя, белый король разрушает оборону противника. 11. Kpe6 Kc8 12. f6 Kpg6 13. f7 Kpg7 14. Kpd7 Ka7 15. Kpe8 с победой.

К нашим читателям

Продолжается подписка
на журнал «Квант» на 1988 год.
Журнал рассчитан
на учеников 6—10 классов.
Он полезен учителям,
особенно тем, кто ведет
кружки и факультативные
занятия, и всем
любителям математики
и физики.
Индекс журнала в каталоге
«Союзпечати» 70465.
Подписная цена на год
4 рубля 80 копеек.
Подписка принимается
без ограничений
в течение всего года
в агентствах «Союзпечати»,
на почтамтах
и в отделениях связи.

Номер подготовили
А. Н. Виленкин,
А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов,
Т. Н. Кольченко, Д. А. Крымов, Н. С. Кузьмина,
Э. В. Назаров, И. Н. Чернуский, В. Б. Юдин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов
Художественный редактор Т. М. Макарова
Корректор М. Л. Медведская

Сдано в набор 16.07.87. Подписано к печати 20.08.87
Т 17578. Бумага 70×108/16. Печать офсетная
Усл. кр.-отт. 23,8. Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,35
Тираж 200 519 экз. Цена 40 коп. Заказ 1943

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. **250-33-54**

Шахматная страничка

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

СТАТИСТИКА ЭНДШПИЛЯ

Оценивая некоторый класс окончаний как ничейный или выигрышный для сильнейшей стороны, мы интуитивно опираемся на некоторую статистику. Например, есть такое известное изречение С. Тартаковера: «Все ладейные эндшпили ничейны». Разумеется, гроссмейстер имел в виду лишь то обстоятельство, что выиграть такое окончание нелегко.

С другой стороны, в борьбе ферзя против ладьи слабейшая сторона иногда добивается ничьей, но эти окончания считаются выигрышными, потому что доля позиций, в которых ферзь справляется с ладьей, близка к 100 процентам.

Итак, статистический подход позволяет охарактеризовать тот или иной вид эндшпиля. Но, понятно, такой подход требует помощи ЭВМ. К. Томпсон, программам которого принадлежат многие рекорды длительности игры, для каждого класса исследуемых окончаний приводит соответствующие статистические данные. При этом наше представление о некоторых видах эндшпиля существенно меняется.

Ладья со слоном против ладьи. Традиционно считается, что это окончание теоретически ничейно, хотя и защищаться довольно скучно. Но вот машинное исследование показало, что среди всех возможных положений с ладьей и слоном против ладьи доля выигрышных составляет 40,1 %! Выражаясь математическим языком, вероятность победы у стороны, владеющей материальным перевесом, равна примерно 0,4. Правда, здесь мы как бы сделали два допущения: а) все позиции данного класса имеют одинаковый шанс возникнуть на доске во время игры; б) при «доигрывании» любой из них обе стороны играют оптимальным образом.

Ферзь с пешкой против ферзя. Вероятность выигрыша существенно зависит от расположения пешки. Наибольший процент выигрышных позиций достигается при пешке на d7 или e7 — 85,6 %. Другой крайний случай — при пешке на a3 (h3), тогда процент почти вдвое меньше — 48,5 %.

Ладья с пешкой против ладьи. Максимальная вероятность выигрыша также достигается при пешке на d7 (e7), причем она еще выше — 89,1 %, а минимальный шанс при пешке на a2 (h2) — 44 %.

Ладья и конь против ладьи. Этот трудный эндшпиль до недавних пор считался совершенно ничейным. Однако компьютерные исследования показали, что процент выигрышных позиций достаточно высок — 35,9 %.

Ферзь со слоном против ферзя, ферзь с конем против ферзя. Эти окончания почти не встречаются на практике. Многие думают, что выигрыш в них маловероятен, но компьютер опроверг эту точку зрения. В первом классе 33,4 % выигрышных позиций, а во втором — 48,4 %.

Два разноцветных слона против коня. Это окончание вызвало много споров, особенно среди этюдистов. Совсем недавно ЭВМ доказала, что сильнейшая сторона почти всегда побеждает — 91,8 % выигрышных положений.

Ферзь против двух легких фигур. Эти окончания можно считать проигранными для слабейшей стороны. А машинная статистика выигрышных позиций такова:

ферзь против двух коней — 89,7 %,

ферзь против двух слонов — 92,1 %,

ферзь против слона и коня — 93,1 %.

Теории известны ситуации, когда две легкие фигуры сооружают неприступную крепость около своего короля. Исследуя эти окончания, машина интересовалась необычными позициями взаимного цугцванга. Оказалось, что в двух случаях из трех такие конфигурации единственны (см. «Квант», 1987, № 2).

Укажем теперь три рекордные позиции, в которых ферзь с королем вынуждены потратить максимальное время, чтобы забрать одну из легких фигур.

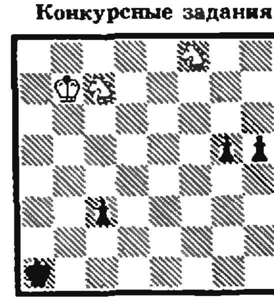
Белые: Кра8, Фb6; черные: Кpd7, Сd5, Ке7. Лишь на 42-м ходу белые берут коня или слона.

Белые: Кpd8, Фh1; черные: Кpd6, Ке5, Кh8. При оптимальной игре обеих сторон конь гибнет лишь на 63-м ходу.

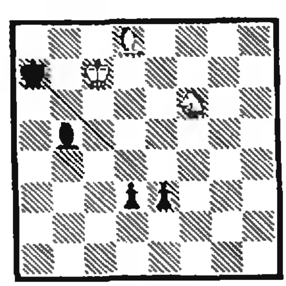
Белые: Кра8, Фа1; черные: Кpd7, Сс5, Сd5.

1. Кpb8 Сd6+ 2. Кра7 Сс5+ 3. Кра6 Сс4+ 4. Кра5 Кpd6 5. Фс1 Кpd5 6. Фс3 Сd4 7. Фf3+ Кре5 8. Фg3+ Кре4 9. Фh4+ Кре3 10. Фе7+ Кpd3 11. Кpb4 Сd5 12. Фе1 Сf3 13. Фh4 Кре3 14. Крс4 Се2+ 15. Кpd5 Сf3+ 16. Кре6 Се4 17. Фg3+ Кpd2 18. Фf4+ Кpd3 19. Кpd6 Сс3 20. Фg3+ Кpd2 21. Фg1 Сd3 22. Крс5 Крс2 23. Фе3 Сb2 24. Кpb4 Сс3+ 25. Кра3 Сb2+ 26. Кра4 Сс3 27. Фс5 Се4 28. Фс4 Сf3 29. Кpb5 Сd1 30. Фа2+ Кpd3 31. Фg2 Се2 32. Крс5 Сd1 33. Фh3+ Кpd2 34. Кpd5 Сb3+ 35. Кре4 Сс2+ 36. Кpf4 Сd4 37. Фа3 Сd3 38. Фb4+ Сс3 39. Фа4 Сb2 40. Кpf3 Сс3 41. Фа7 Сb2 42. Фс5 Се2+ 43. Кpf2 Сd3 44. Фg5+ Крс2 45. Фd5 Кpd2 46. Фа2 Крс3 47. Кре1 Сс4 48. Фа5+ Кpb3 49. Фb6+ Крс3 50. Фb7 Крс2 51. Фh7+ Кpb3 52. Фb1 Крс3 53. Фе4 Са3 54. Фе3+ Кpb2 55. Кpd1 Сb3+ 56. Кpd2 Сb4+ 57. Кpd3 Са2 58. Фе2+ Кpb3 59. Фс2+ Кра3 60. Кpd4 Сb3 61. Фс1+ Кра2 62. Кpd3 Са3 63. Фс7 Сb2 64. Фа7+ Кpb1 65. Кpd2 Сd5 66. Фb6 Се4 67. Фb5 Сg2 68. Фе2 Сb7 69. Фf1+ Кра2 70. Фf7+ Кра3 71. Ф:b7.
Всем рекордам рекорд!

Конкурсные задания



17. Белые начинают и делают ничью.



18. Белые начинают и делают ничью.

Срок отправки решений — 25 ноября 1987 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 17, 18».

Цена 40 коп.
Индекс 70465

Года полтора назад одна из центральных газет опубликовала письмо родителей, которые на волне общего увлечения приобрели сыну новую головоломку. «Запутать» ее, конечно, не составило труда. А вот «распутать»... Головоломка не поддавалась ни сыну, ни отцу, ни учителю в школе. Вконец отчаявшиеся родители обратились к изготовителям злосчастной игрушки. О результате можно судить по тому, что следующей инстанцией была газета.

У нас есть основания предполагать, что предметом, доставившим столько хлопот его счастливым владельцам, была изображенная здесь головоломка (рис. 1). Это 7 дисков с 6 лунками на каждом, во всех лунках кроме одной лежат цветные шарики. Повернув на некоторый угол колесико сбоку головоломки, мы с помощью системы шестеренок поворачиваем одновременно все диски на тот же угол в направлениях, указанных стрелками. При этом «дырку» (пустую лунку) нужно установить против шарика на другом диске, вкатить шарик в «дырку», освободившуюся лунку вращением колесика установить против нового шарика и т. д. Так производится перестановка шариков. А как вернуться в исходное положение?

Найти алгоритм помогает граф головоломки (см. обложки «Кванта» № 5 и № 7). Отметим на плоскости 42 точки — по числу лунок — и соединим линией каждую пару точек, отвечающих «связанным» друг с другом лун-

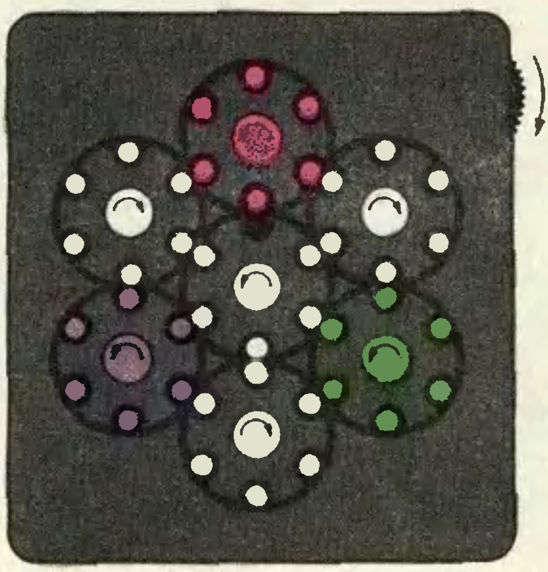


Рис. 1.

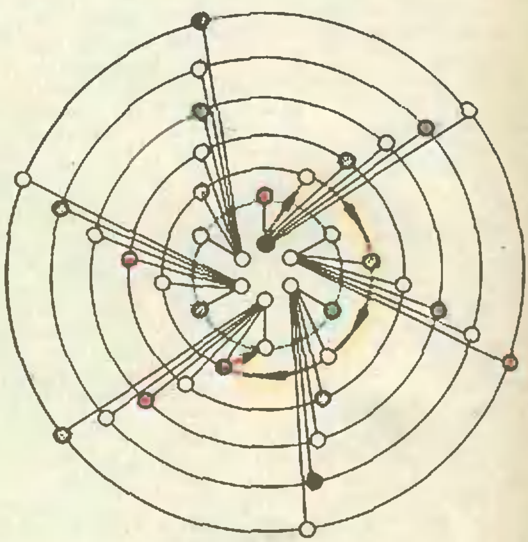


Рис. 2.

кам, т. е. лункам, которые можно состыковать вращением колесика (рис. 2). Легко понять, что любая лунка связана ровно с одной лункой на каждом из соседних дисков, т. е. лунки центрального диска (6 точек в центре графа) связаны с 6 лунками каждая, а остальные лунки имеют по 3 «связи». Лунки, непосредственно стыкующиеся с центральными («лунки 1-го уровня»), образуют на графе внутреннее кольцо. При вращении колесика на 60° на их место придут «лунки 2-го уровня» — они изображаются точками следующего кольца. Дальше идет кольцо «лунок 3-го уровня», попадающих на 1-й уровень при повороте на 120°, и т. д. Теперь головоломку можно свести к перемещениям фишек по линиям графа. Такие «путешествия по графам» подробно обсуждались в одноименной статье Д. Вакарелова («Квант» № 7, 1986, с. 50). Главная трудность возникает при переносе теории на практику — слишком уж различаются расположения шариков в головоломке и на графе (на обоих рисунках изображено одно и то же (!) расположение цветов; черным на графе помечена «дырка»).

Головоломку удобно собирать по уровням; предварительно очередной уровень переводится на место 1-го. Поясним, как переставляются шарики 1-го уровня. Переведем сначала «дырку» через 2-й уровень на одно из мест 1-го уровня (по красным стрелкам), прогоним ее по кругу (синие дуги) и возвратим тем же (красным) путем. В результате 5 шариков 1-го уровня циклически переставляются, а остальные вернутся на свои места (проверьте!). Из таких 5-циклов можно составить любую перестановку цветов на 1-м уровне. Аналогично можно устроить обмен между разными уровнями.

В. Н.